

ПРАЦЬОВИТИЙ О.М., РАТУШНЯК С.П.

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО ЗБУРЕНОГО ДВІЙКОВОГО РЯДУ

This paper investigates the properties of the series $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, where $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+1}}$, which is referred to as the perturbed binary series. It is shown that for the tails of the series, defined as $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ and for the terms of the series, the inequalities

$$a_{2k-1} > r_{2k-1}, \quad a_{2k} < r_{2k}$$

hold for any $k \in \mathbb{N}$. These inequalities ensure that the set

$$E(a_n) = \left\{ x : x = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}$$

of all subsums of the series satisfies the necessary conditions for Cantor-type structure, in particular, nowhere denseness.

Explicit expressions are obtained for the differences $a_n - r_n$, which characterize the lengths of certain intervals adjacent to the set E specifically the intervals of the form $(r_{2k-1}; a_{2k-1})$ as well as the overlaps of cylindrical segments $\Delta_{c_1 \dots c_m} = [u; v]$, where $(c_1, \dots, c_m)$ is an ordered tuple of zeros and ones, $u = c_1 a_1 + \dots + c_m a_m$, $v = u + r_m$.

The asymptotic behavior of the ratio $\frac{r_n - a_n}{r_{n-1}}$, is described; it reflects the progressive “reduction” of overlaps and “gaps” in the corresponding cylindrical segments.

Several other properties of the given series are also established.

Key words and phrases: subsum set of a series, cylinder sets, gaps (adjacency intervals) in the subsum set, overlaps of cylinder sets, Cantorval.

Ukrainian State Dragomanov University,
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: alexandr.pratsiovytyi@gmail.com, ratush404@gmail.com

ВСТУП

Одним з магістральних напрямів розвитку геометрії числових рядів є тополого-метричний аналіз множин їх неповних сум (підсум) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 16, 17]. Результати таких досліджень важливі для теорії сингулярних ймовірнісних мір, нескінченних згорток Бернуллі, теорії локально складних функцій, теорії фракталів.

УДК 514.8, 517.5

2010 *Mathematics Subject Classification*: 40A05, 11B05, 28A80.

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, S.R.).

Нагадаємо, що множиною неповних сум (підсум) збіжного числового ряду

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = a_1 + a_2 + \dots + a_n + r_n = r_0$$

називається множина

$$E(a_n) = \{x : x = \sum_{n \in M \subset N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}, M \in 2^N\}.$$

Добре відомо, що множина неповних сум абсолютно збіжного ряду є обмеженою, континуальною, досконалою множиною, симетричною відносно точки $\frac{r_0}{2}$. Також відомо, що існує лише три топологічні типи множин підсум з монотонною послідовністю членів. Це скінченне об'єднання відрізків; множина, гомеоморфна класичній множині Кантора; канторвал. У загальній постановці задача встановити топологічний тип множини неповних ряду є непростою. Сьогодні відомі необхідні і достатні умови належності множини підсум ряду до першого типу (теорема Какея), але невідомі критерії канторвальності та ніде не щільності множини підсум ряду. І лише у доволі вузьких класах її вдається вичерпно розв'язати. В переважній більшості це класи мультигеометричних рядів (зрозуміло, що існують виключення). Очевидним є те, що коли $a_n = 2^{-n}$, тобто коли ряд є класичним двійковим, $E(a_n) = [0; 1]$. Якщо $a_n = 2 \cdot 3^{-n}$, то множиною неповних сум відповідного ряду є класична множина Кантора – один з найпростіших прикладів лінійних фракталів (ніде не щільна множина нульової міри Лебега).

Дана робота присвячена властивостям збіжного додатного ряду

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 + 1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4 + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2k} + 1} + \dots, \quad (1)$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} > r_0 \approx 0,94582279, \quad a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}}, \quad a_{2k} = \frac{1}{2^{2k} + 1},$$

які мають суттєво спростити для нього доволі непросту задачу про тополого-метричні властивості множини підсум. Цей ряд ми називаємо *збуреним двійковим*.

Remark 1. Очевидною є рівність:

$$\frac{1}{2^n + 1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n(2^n + 1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n(2^n + 1)}. \quad (2)$$

Lemma 1. Має місце співвідношення

$$\frac{14}{15} < r_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k + 1)}. \quad (3)$$

Proof. Оскільки (див. (2))

$$\frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k} + 1} = \frac{1}{2^{2k}(2^{2k} + 1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2k} + 1} = \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}(2^{2k} + 1)}, \quad (4)$$

то

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2(2^2 + 1)} \right) + \frac{1}{2^3} + \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4(2^4 + 1)} \right) + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k + 1)} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(4^k + 1)} > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{14}{15}. \quad \square \end{aligned}$$

1 СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ЧЛЕНАМИ ТА ЗАЛИШКАМИ РЯДУ

Theorem 1. Для будь-якого натурального k виконуються нерівності

$$a_{2k-1} > r_{2k-1}, \quad a_{2k} < r_{2k}.$$

Proof. Оскільки

$$r_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k} + 1} + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2} + 1} + \frac{1}{2^{2k+3}} + \dots < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+i}} = \frac{1}{2^{2k-1}} = a_{2k-1},$$

то $a_{2k-1} > r_{2k-1}$.

Доведемо другу нерівність. Спочатку розглянемо

$$r_2 = r_0 - a_1 - a_2 = r_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} > \frac{14}{15} - \frac{7}{10} = \frac{28 - 21}{30} = \frac{7}{30} > \frac{1}{5} = a_2.$$

Тепер розглянемо загальний випадок. Доведемо, що

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k} + 1} < \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2} + 1} + \frac{1}{2^{2k+3}} + \frac{1}{2^{2k+4} + 1} + \dots = r_{2k}.$$

Використовуючи рівність (4), остання нерівність набуває вигляду

$$\frac{1}{2^{2k} + 1} < \frac{1}{2^{2k+1}} + \left(\frac{1}{2^{2k+2}} - \frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2} + 1)} \right) + \frac{1}{2^{2k+3}} + \left(\frac{1}{2^{2k+4}} - \frac{1}{2^{2k+4}(2^{2k+4} + 1)} \right) + \dots$$

Вона рівносильна нерівностям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2k} + 1} &< \frac{1}{2^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} \cdot 2^{2m}(2^{2k+2m} + 1)}, \\ \frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m} + 1)} &< \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k} + 1} = \frac{1}{2^{2k}(2^{2k} + 1)}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m} + 1)} &< \frac{1}{2^{2k} + 1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Остання нерівність рівносильна нерівності $a_{2k} < r_{2k}$. Доведемо нерівність (5). Оскільки

$$\begin{aligned} 2^2(2^{2k+2} + 1) > 2^{2k+4} &\Leftrightarrow \frac{1}{2^2(2^{2k+2} + 1)} < \frac{1}{2^{2k+4}}, \\ 2^4(2^{2k+4} + 1) > 2^{2k+8} &\Leftrightarrow \frac{1}{2^4(2^{2k+4} + 1)} < \frac{1}{2^{2k+8}}, \\ &\dots\dots\dots \\ 2^{2m}(2^{2k+2m} + 1) > 2^{2k+4m} &\Leftrightarrow \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m} + 1)} < \frac{1}{2^{2k+4m}}. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Тому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m} + 1)} < \frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{15}.$$

Тепер порівняємо вирази $\frac{1}{15 \cdot 2^{2k}}$ і $\frac{1}{2^{2k+1}}$, розглянувши різницю

$$\frac{1}{2^{2k} + 1} - \frac{1}{15 \cdot 2^{2k}} = \frac{15 \cdot 2^{2k} - 2^{2k} - 1}{15 \cdot 2^{2k}(2^{2k} + 1)} = \frac{14 \cdot 2^{2k} - 1}{15 \cdot 2^{2k}(2^{2k} + 1)} > 0.$$

Отже,

$$\frac{1}{15 \cdot 2^{2k}} < \frac{1}{2^{2k+1}} \text{ і } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2^{2k+2m} + 1)} < \frac{1}{2^{2k+1}}.$$

Таким чином, $a_{2k} < r_{2k}$. Теорему доведено. $\square$

Corollary 1. Для будь-яких натуральних k і m виконуються нерівності:

$$a_{2k-1} > a_{2k} + a_{2k+1} + \dots + a_{2k+m}.$$

Theorem 2. Мають місце рівності

$$r_{2k-1} = a_{2k-1} - \frac{1}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)}, r_{2k} = \frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)}.$$

Proof. Використовуючи рівність (2), виразимо

$$\begin{aligned} r_{2k-1} &= \frac{1}{2^{2k} + 1} + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2} + 1} + \frac{1}{2^{2k+3}} + \dots = \\ &= \left(\frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}(2^{2k} + 1)} \right) + \frac{1}{2^{2k+1}} + \left(\frac{1}{2^{2k+2}} - \frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2} + 1)} \right) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+n}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m} + 1)} = \frac{1}{2^{2k-1}} - \frac{1}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} = \\ &= a_{2k-1} - \frac{1}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)}; \\ r_{2k} &= \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2} + 1} + \frac{1}{2^{2k+3}} + \frac{1}{2^{2k+4} + 1} + \dots = \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}} + \left(\frac{1}{2^{2k+2}} - \frac{1}{2^{2k+2}(2^{2k+2} + 1)} \right) + \frac{1}{2^{2k+3}} + \left(\frac{1}{2^{2k+4}} - \frac{1}{2^{2k+4}(2^{2k+4} + 1)} \right) + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+n}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m} + 1)} = \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} = \\ &= \frac{1}{2^{2k} + 1} + \frac{1}{2^{2k+1}(2^{2k+1} + 1)} - \frac{1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} = \\ &= a_{2k} + \frac{1}{2^{2k+1}(2^{2k+1} + 1)} - \frac{1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} = \\ &= a_{2k} + \frac{1}{4^k} \left(\frac{2}{2 \cdot 4^k + 1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} \right). \end{aligned}$$

$\square$

Corollary 2. *Мають місце рівності*

$$a_{2k-1} - r_{2k-1} = \frac{1}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)},$$

$$r_{2k} - a_{2k} = \frac{1}{4^k} \left(\frac{2}{2 \cdot 4^k + 1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} \right).$$

Lemma 2. *Якщо для довільного збіжного додатного ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_k + r_k = S_{k-1} + a_k + S_{k,m} + r_{k+m}$$

з монотонно спадними членами для деякого k виконується нерівність $r_k > a_k$, то існує таке $m = m(k)$, що

$$S_{k,m} \equiv a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m} > a_k.$$

Proof. Оскільки $r_k > a_k$, то $r_k - a_k \equiv c = \text{const} > 0$. Тоді

$$r_k - a_k = S_{k,m} - a_k + r_{k+m} = c > 0.$$

Звідки

$$S_{k,m} - a_k = c - r_{k+m}.$$

Оскільки ряд збіжний, а його члени a_{k+m} ($m = 1, 2, \dots$) утворюють строго спадну послідовність, то послідовність (r_{k+m}) є строго спадною нескінченно малою.

Взявши $r_{k+m} < c$, отримаємо $S_{k,m} > a_k$. Лему доведено. $\square$

Corollary 3. *Для будь-якого натурального k існує таке $m = m(k)$, що для членів ряду (1) виконується нерівність $a_{2k+1} + a_{2k+2} + \dots + a_{2k+m} > a_{2k}$.*

Remark 2. *Теорема засвідчує виконання необхідних умов канторвальності (як і ніде не щільності) множини неповних сум ряду (1).*

2 ЩІЛИНИ ТА ПЕРЕКРИТТЯ

Definition 1. *Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ – впорядкований набір нулів та одиниць. Відрізок $[a; b]$, де $a = \sum_{i=1}^m c_i a_i$, $b = a + r_m$, називається циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ і позначається $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$.*

Безпосередньо з означення випливають наступні властивості циліндричних відрізків.

1. Всі циліндри рангу m мають рівну довжину r_m , яка прямує до нуля з ростом m .
2. Має місце вкладення: $\Delta_{c_1 \dots c_m i} \subset \Delta_{c_1 \dots c_m}$.
3. Для будь-якої послідовності (c_n) нулів та одиниць послідовність вкладених циліндричних відрізків стягується в точку множини підсум ряду.
4. $\min \Delta_{c_1 \dots c_m 0} < \min \Delta_{c_1 \dots c_m 1}$.

Циліндричні відрізки $\Delta_0 = [0; r_1]$ і $\Delta_1 = [a_1; r_0]$ першого рангу не перекриваються, оскільки $r_1 < a_1$. Інтервал $(r_1; a_1)$ є суміжними з множиною $E(a_n)$, його називатимемо щілиною рангу 1.

Для циліндричних відрізків рангу 2 маємо перетини:

$$\Delta_{00} \cap \Delta_{01} = [a_2; r_2], \quad \Delta_{10} \cap \Delta_{11} = [r_0 - r_2; r_0 - a_2].$$

Аналогічно,

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1} = [c + a_{2k}; c + r_{2k}],$$

де $c = c_1 a_1 + \dots + c_{2k-1} a_{2k-1}$.

Легко довести наступне загальне твердження, що стосується всіх збіжних додатних рядів з монотонною послідовністю членів, включаючи ряд (1).

Lemma 3. Кожен інтервал $(r_{2k-1}; a_{2k-1})$ є суміжним з множиною E підсум ряду (1).

Proof. Те, що a_n і r_n належать E очевидно. Розглянемо довільне число x з множини E , тобто $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, де $(\varepsilon_n) \in L$.

Якщо $\varepsilon_i = 1$ для деякого $i \leq 2k - 1$, то $x \geq a_i > a_{2k-1}$. Тому $x \notin (r_{2k-1}; a_{2k-1})$.

Якщо $\varepsilon_i = 0$ для всіх $i \leq 2k - 1$, але $\varepsilon_i = 1$ для всіх $i > 2k - 1$, то $x = r_{2k-1} = a_{2k} + a_{2k+1} + \dots$. Якщо ж деяке $\varepsilon_{2k-1+i} = 0$, то $x < r_{2k-1}$.

Отже, $x \notin (r_{2k-1}; a_{2k-1})$. З довільності вибору x отримуємо $(r_{2k-1}; a_{2k-1}) \cap E = \emptyset$. $\square$

Corollary 4. Для довільного натурального k маємо $(r_0 - a_{2k-1}; r_0 - r_{2k-1}) \cap E = \emptyset$.

Дане твердження слідує з симетричності множини підсум ряду відносно точки $\frac{r_0}{2}$.

Remark 3. Оскільки згідно з наслідком з теореми

$$a_{2k-1} - r_{2k-1} = \frac{1}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m (4^{k+m} + 1)},$$

то міра Лебега множини $E(a_n)$ задовольняє нерівність

$$\lambda(E(a_n)) < r_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} - r_{2k-1}) = r_0 - \frac{2}{4^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m (4^{k+m} + 1)}.$$

Ця груба оцінка міри Лебега множини E є наслідком її симетрії відносно точки $\frac{r_0}{2}$.

3 АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ПЕРЕКРИТТІВ ТА ЩІЛИН

Lemma 4. Для членів та залишків ряду (1) має місце рівність

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_n}{a_n} = 1.$$

Proof. Розглянемо спочатку відношення

$$\begin{aligned}
 \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}} &= \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+2} + 1} + \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+3}} + \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+4} + 1} + \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+5}} + \dots = \\
 &= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots\right) + 2^{2k+1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+2m} + 1} = \\
 &= \frac{1}{3} + 2^{2k+1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{k+m}} - \frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m} + 1)}\right) = \\
 &= \frac{1}{3} + 2^{2k+1} \cdot \frac{1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m} - 2^{2k+1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m} + 1)} = \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} = \\
 &= 1 - 2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Тепер розглянемо відношення

$$\begin{aligned}
 \frac{r_{2k}}{a_{2k}} &= \frac{2^{2k} + 1}{2^{2k+1}} + \frac{2^{2k} + 1}{2^{2k+2} + 1} + \frac{2^{2k} + 1}{2^{2k+3}} + \frac{2^{2k} + 1}{2^{2k+4} + 1} + \dots = \\
 &= \frac{2^{2k} + 1}{2^{2k+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} + (4^k + 1) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+m} + 1} = \\
 &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{4^k}\right) + (4^k + 1) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{k+m}} - \frac{1}{4^{k+m}(4^{k+m} + 1)}\right) = \\
 &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{4^k}\right) + \frac{4^k + 1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m} - \frac{4^k + 1}{4^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} = \\
 &= 1 + \frac{1}{4^k} - \left(1 + \frac{1}{4^k}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty),
 \end{aligned}$$

оскільки $\frac{1}{4^m(4^{k+m} + 1)} < \frac{1}{4^{2m} \cdot 4^k}$. □

Theorem 3. Мають місце співвідношення

$$\frac{a_{2k+1} - r_{2k+1}}{r_{2k}} = \frac{1 - \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}}{1 + \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \quad (6)$$

$$\frac{r_{2k} - a_{2k}}{r_{2k-1}} = \frac{\frac{r_{2k}}{a_{2k}} - 1}{\frac{r_{2k}}{a_{2k}} + 1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Proof. Оскільки

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{2k+1} - r_{2k+1}}{r_{2k}} &= \frac{a_{2k+1} - r_{2k+1}}{a_{2k+1} + r_{2k+1}} = \frac{1 - \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}}{1 + \frac{r_{2k+1}}{a_{2k+1}}}, \\
 \frac{r_{2k} - a_{2k}}{r_{2k-1}} &= \frac{r_{2k} - a_{2k}}{r_{2k-1} + a_{2k}} = \frac{\frac{r_{2k}}{a_{2k}} - 1}{\frac{r_{2k}}{a_{2k}} + 1},
 \end{aligned}$$

то враховуючи лему 4, отримуємо (6) і (7). □

REFERENCES

- [1] *Anisca R., Ilie M.* On the structure of arithmetic sums of Cantor sets associated with series // Results Math. – 2023. – **78**, № 5. article no. 5.
- [2] *Banakh T., Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Topological and measure properties of some self-similar sets // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 2015. – **46**, № 2. – P. 1013–1028.
- [3] *Banakiewicz M.* The Lebesgue measure of some M-Cantorval // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – **471**, № 1-2. – P. 170–179.
- [4] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Multigeometric sequences and Cantorvals // Central European Journal of Mathematics. – 2014. – **12**, № 7. – P. 1000–1007.
- [5] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Prus-Wisniowski F.* Topological and algebraic aspects of subsums of series // Traditional and present-day topics in real analysis. – 2013. – P. 354 – 366.
- [6] *Bielas W., Plewik S., Walczyńska M.* On the center of distances // European Journal of Mathematics. – 2018. – **4**. – P. 687–698.
- [7] *Ferdinands J., Ferdinands T.* A family of Cantorvals // Open Math. – 2019. – **17**, № 1. – P. 1468–1475.
- [8] *Filipczak T., Nowakowski P.* Conditions for the difference set of a central Cantor set to be a Cantorval // Results Math. – 2023. – **78**, article no. 166.
- [9] *Glab S., Marchwicki J.* Set of Uniqueness for Cantorvals // Results Math. – 2023. – **78**, № 9. art. 9.
- [10] *Guthrie J., Nymann J.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – **55**, № 2. – P. 323–327.
- [11] *Karvatskyi D., Murillo A., Viruel A.* The achievement set of generalized multigeometric sequences // Results Math. – 2024. – **79**, article no. 132.
- [12] *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets // Non-linearity. – 1994. – **7**, № 2, – P. 329–343.
- [13] *Nymann J., Sáenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. – 2000. – **83**, № 1. – P. 1–4.
- [14] *Pratsiovytyi M., Karvatskyi D.* Cantorvals as sets of subsums for a series related with trigonometric functions // Proceedings of the International Geometry Center. – 2023. – **15**, № 3-4, – P. 262–271.
- [15] *Pratsiovytyi M.V., Karvatsky D.M.* Jacobsthal-Lucas series and their applications // Algebra and discrete mathematics.–2017, 24 (1), P. 169-180.
- [16] *Vynnyshyn Ya., Markitan V., Pratsiovytyi M., Savchenko I.* Positive series whose sum sets are cantorvals // Proceedings of the International Geometry Center. – 2019. – **12**, № 2. – P. 26–42.
- [17] *Pratsiovytyi M., Karvatskyi D.* The set of incomplete sums of the modified Guthrie-Nymann series // Bukovinian Math. Journal. – 2022. – **10**, № 2. – P. 195–203.

Received 01.06.2025

Працьовитий О.М., Ратушняк С.П. Про властивості одного збуреного двійкового ряду // Буковинський матем. журнал — 2025. — Т.13, №1. — С. 109–117.

У роботі вивчаються властивості ряду $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, де $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}}$, $a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+1}}$, який названо збуреним двійковим. Встановлено, що для залишків $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$

і членів ряду виконуються нерівності $a_{2k-1} > r_{2k-1}$, $a_{2k} < r_{2k}$ для довільного $k \in N$, а це забезпечує виконання необхідних умов канторвальності (як і ніде не щільності) множини $E(a_n) = \left\{ x : x = \sum_{n \in M \subset N} a_n, M \in 2^N \right\}$ всіх підсум ряду.

Отримано вирази різниць $a_n - r_n$, що характеризують довжини деяких суміжних з множиною E інтервалів $(r_{2k-1}; a_{2k-1})$ та перекриття циліндричних відрізків: $\Delta_{c_1 \dots c_m} = [u; v]$, де $(c_1, \dots, c_m)$ – впорядкований набір нулів та одиниць $u = c_1 a_1 + \dots + c_m a_m$, $v = u + r_m$.

Описано асимптотичну поведінку відношення $\frac{r_n - a_n}{r_{n-1}}$, яке характеризує процес “зменшення” долі перекриттів та “щілин” у відповідних циліндричних відрізках. Встановлено низку інших властивостей даного ряду.