Дронь В.С.[1], Мединський І.П.[1,2]

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ З ОДНІЄЮ ГРУПОЮ ВИРОДЖЕННЯ

Дослідження присвячене виродженим параболічним рівнянням з блочною структурою, які за певних умов є узагальненням добре відомого виродженого параболічного рівняння дифузії з інерцією А.М.Колмогорова.

У цій праці сформульовано спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних на коефіцієнти таких рівнянь, за яких доведено існування класичного фундаментального розв'язку задачі Коші, отримано оцінки для нього та його похідних, доведено властивості такі, як нормальність, формулу згортки, єдиність. Також отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах та інтегральні зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші.

Отримані результати можна використати у подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь.

Ключові слова і фрази: вироджене параболічне рівняння типу Колмогорова, ультрапараболічні рівняння довільного порядку, коректна розв'язність задачі Коші, інтегральне зображення класичних розв'язків, інтеграли Пуассона, азійські опціони, спеціальні умови Гельдера, спеціальні вагові простори.

---

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, вул. Наукова, 3-Б, 79060, Львів
[2] Національний університет "Львівська Політехніка", вул. С.Бандери, 12, 79013, Львів
e-mail: *vdron@ukr.net, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua*

Вступ

У роботі розглянуто вироджені параболічні рівняння довільного порядку з блочною структурою з однією групою виродження. Такі рівняння узагальнюють відповідні рівняння другого порядку, що виникають при дослідженнях азійських опціонів на ринку цінних паперів [1]. За певних умов вони є модифікацією класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [2]. Це рівняння та його різноманітні узагальнення вивчалися багатьма авторами. Лінійні й нелінійні вироджені параболічні рівняння виникають

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.

у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів, у віковому наближенні теорії сповільнених електронів, у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання азійських опціонів, у біології, економіці та інших галузях науки (див. [3, 4, 5]).

У даній праці вивчається коректна розв'язність задачі Коші для рівнянь типу Колмогорова довільного порядку з однією групою виродження, з певною вимогою щодо вигляду матриці, що задає блочну структуру рівняння. Сформульовано умови на коефіцієнти рівняння, за яких доведено існування класичного фундаментального розв'язку задачі Коші, отримано оцінки для нього та його похідних, доведено властивості такі, як нормальність, формулу згортки, єдиність. Також доведено коректну розв'язність задачі Коші, а також інтегральне зображення класичного розв'язку у вигляді інтеграла Пуссона від функції або узагальненої міри, якими задається початкова умова.

1 Формулювання задачі, припущення й означення

Розглянемо рівняння

$$(S_B - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де b, n_1, n_2 – натуральні числа такі, що $b > 0$, $0 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1 + n_2$; $x := (x_1, x_2)$, $x_i := (x_{i1}, ..., x_{in_i})$, $i \in \{1,2\}$; мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$ запишемо у вигляді $k := (k_1, k_2)$, де $k_i := (k_{i1}, \ldots, k_{in_i}) \in \mathbb{Z}_+^{n_i}$, $|k_i| := |k_{i1}| + \ldots + |k_{in_i}|$, $i \in \{1,2\}$; $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x)|\ t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} b_{ij}^1 x_{1i} \right) \partial_{x_{2j}}, \qquad A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t,x) \partial_{x_1}^{k_1}. \tag{2}$$

Перший диференціальний вираз з (2) у матричній формі має вигляд

$$S_B = \partial_t - (x, BD_x),$$

де B – матриця розміру $n \times n$, яка має структуру

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{3}$$

B^1 – матриця, складена з дійсних чисел b_{ij}, $i \in \{1, ..., n_1\}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$, O – нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := col(\partial_{x_{11}}, ..., \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, ..., \partial_{x_{2n_2}})$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Використовуватимемо такі умови:

A$_1$. Для матриці (3), в якій блок B^1 записаний у вигляді $\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix}$, де B_1^1, B_2^1 – матриці відповідно розмірів $n_2 \times n_2$ і $(n_1 - n_2) \times n_2$, виконується умова: $\det B_1^1 \ne 0$;

A$_2$. Існує така стала $\delta > 0$, що для всіх $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ має місце оцінка

$$\mathrm{Re} \sum_{|k_1| = 2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b}.$$

Рівняння (1) при виконанні умов $\mathbf{A}_1$ та $\mathbf{A}_2$ входять до класу, який часто (див., наприклад, [6]) позначається символом $\mathbf{E}_{21}^B$. Він узагальнює клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку $\mathbf{E}_{21}$, запроваджений у монографії [7]. Рівняння типу (1) узагальнюють рівняння, які з'являються в моделях дифузії з інерцією, а також при дослідженні математичних моделей азійських опціонів, коли змінні, що залежать від траєкторії ціни, включають до простору станів.

Очевидно, що при виконанні умови $\mathbf{A}_1$ заміна просторових змінних

$$\hat{x}_{1j} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ij} x_{1i}, & j \in \{1, ..., n_2\}, \\ x_{1j}, & j \in \{n_2+1, ..., n_1\}; \end{cases} \qquad \hat{x}_{2j} = x_{2j}, \quad j \in \{1, ..., n_2\} \tag{4}$$

є невиродженою.

Структура заміни змінних (4) та її невиродженість доводять наступне твердження.

Твердження 1. *При виконанні умови* $\mathbf{A}_1$ *заміна просторових змінних* (4) *зводить рівняння* (1) *до рівняння*

$$(S_{\hat{B}} - \hat{A}(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1}))\hat{u}(t, \hat{x}) = 0, \quad (t, \hat{x}) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{5}$$

в якому

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} O & \hat{B}^1 \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \hat{B}^1 := \begin{pmatrix} I_{n_2} \\ O \end{pmatrix}$$

I_{n_2} *– одинична матриця порядку* n_2, O *– нульові матриці відповідних розмірів, диференціальний вираз* $\hat{A}(t, \hat{x}, \partial_{\hat{x}_1})$ *має той самий вигляд, що й вираз* $A(t, x, \partial_{x_1})$, *його коефіцієнти* $\hat{a}_{ij}$, $\hat{a}_i$, *і* $\hat{a}_0$ *виражаються через виражені в нових змінних* $\hat{x}$ *коефіцієнти* a_{ij}, a_i *і* a_0 *та елементи матриць* B^1.

При цьому з виконання умови $\mathbf{A}_2$ *для рівняння* (1) *випливає умова* $\hat{A}_2$ *для рівняння* (5), *яка фактично не відрізняється від умови* $\mathbf{A}_2$.

Надалі використовуватимемо вирази, які пов'язують просторові змінні між собою із залученням елементів матриці B:

$$X(h) := (X_1(h), X_2(h)), \quad X_i(h) := (X_{i1}(h), ..., X_{in_i}(h)), \; i \in \{1, 2\}, \tag{6}$$

$$X_{1j}(h) := x_{1j}, \; j \in \{1, ..., n_1\}, \quad X_{2j}(h) := x_{2j} + h \sum_{i=1}^{n_1} b_{ij} x_{1i}, \; j \in \{1, ..., n_2\}, \; h \in \mathbb{R}.$$

Також позначимо: $M := (n_1 + 3n_2)/2$, $M_k := (|k_1| + 3|k_2|)/2$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k := (k_1, k_2)$, $k_l := (k_{l1}, ..., k_{ln_l})$, $l \in \{1, 2\}$; $E_c(t, x; \tau, \xi) := \exp\left\{-c \sum\limits_{l=1}^{2} (t-\tau)^{1-2l} |X_l(t-\tau) - \xi_l|^2\right\}$, $t > \tau$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $c > 0$ – деяка стала, вирази для X_l, $l \in \{1, 2\}$, задані в (6); $\Delta_{x_1}^{\xi_1} f(t, x) := f(\cdot, (x_1, x_2)) - f(\cdot, (\xi_1, x_2))$, $\Delta_{x_2}^{\xi_2} f(t, x) := f(\cdot, (x_1, x_2)) - f(\cdot, (x_1, \xi_2))$, де $\{t, \tau\} \subset \mathbb{R}$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, f – деяка функція.

Ставитимо на коефіцієнти рівняння (1) ще такі умови:

$\mathbf{A}_3$. Коефіцієнти виразу $A(t, x, \partial_{x_1})$ (тобто функції $a_{k_1}(t, x)$) є обмеженими, неперервними за t на відрізку $[0, T]$ та гельдеровими за просторовими змінними у такому сенсі:

$\exists H_1>0,\ \exists\alpha_1\in(0,1]\ \forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \forall z_1\in\mathbb{R}^{n_1}:\ \ \left|\Delta_{x_1}^{z_1}a(t,x)\right|\le H_1|x_1-z_1|^{\alpha_1},$
$\exists H_2>0,\ \ \exists\alpha_2\in(1/3,2/3]\ \ \forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_2\in\mathbb{R}^{n_2},\ \ \forall h\in[0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)\right|\le H_2(h^{3\alpha_2/2}+|X_2(h)-z_2|^{\alpha_2}).$$

$\exists H_3>0\ \ \forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]},\ \ \forall z_i\in\mathbb{R}^{n_i},\ i\in\{1,2\},\ \ \forall h\in[0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a(t,x)\right|\le H_3|x_1-z_1|^{\alpha_1}(h^{3\alpha_2/2}+|X_2(h)-z_2|^{\alpha_2}),$$

де a – будь-який із коефіцієнтів a_{k_1}, $|k_1|\le 2b$.

$\mathbf{A}_4$. В $\Pi_{[0,T]}$ існують обмежені похідні $\partial_{x_1}^{k_1}a_{k_1}$, $|k_1|\le 2b$, які задовольняють за просторовими змінними умову Гельдера у сенсі $\mathbf{A}_3$.

Очевидно, що при $h=0$ з умови $\mathbf{A}_3$ випливають класичні умови Гельдера для груп просторових змінних.

У наступних пунктах роботи вивчатимуться питання щодо класичного фундаментального розв'язку задачі Коші (далі – КФРЗК) для рівняння (1) та коректної розв'язності задачі Коші у спеціальних вагових просторах.

2 Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші

Сформулюємо теореми про існування та властивості КФРЗК для рівняння (1).

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_3$. *Тоді існує КФРЗК Z для цього рівняння і*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-M_k}E_c(t,x;\tau,\xi),\quad |k_1|/2+|k_2|\le 1,$$
$$k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n,\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \tag{7}$$
$$|S_B Z(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-1}E_c(t,x;\tau,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Для доведення теореми застосуємо невироджену заміну змінних (4) до рівняння (1) й умови теореми. На основі твердження 1 рівняння (1) буде зведене до рівняння (5) з класу $\mathbf{E}_{21}$, а з умов $\mathbf{A}_2$–$\mathbf{A}_3$ ми отримаємо для цього рівняння, відповідно, умови $\hat{A}_2$–$\hat{A}_3$ які відрізняються від перших тільки тим, що в них вираз $X(h)$ замінений виразом $\hat{X}(h)$ який визначений рівностями

$$\hat{X}(h):=(\hat{X}_1(h),\hat{X}_2(h)),\quad \hat{X}_i(h):=(\hat{X}_{i1}(h),...,\hat{X}_{in_i}(h)),\ i\in\{1,2\},$$

$$\hat{X}_{ij}(h):=\sum_{s=0}^{i-1}\frac{1}{s!}h^s\hat{x}_{(i-s),j},\quad j\in\{1,...,n_i\},\quad i\in\{1,2\}.$$

Використовуючи результати з [8] для рівняння з класу $\mathbf{E}_{21}$ при $n_3=0$ (а саме, теорему 3 з [8, С.15]) ми одержимо доведення твердження тереми 1.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняуть умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$. *Тоді існує класичний ФРЗК* Z^* *для спряженого рівняння*

$$S_B^* v(\tau,\xi) - A^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1}) = 0, \quad (\tau,\xi)\in \Pi_{[0,T)},$$

де

$$S_B^* := -\partial_\tau + \sum_{i=1}^{n_2}\left(\sum_{j=1}^{n_1} b_{ji}^1 \xi_{1j}\right)\partial_{\xi_{2i}}, \quad A^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1}) := \sum_{|k_1|\le 2b}(-\partial_{\xi_1})^{k_1}(\bar a_{k_1}(\tau,\xi)v(\tau,\xi));$$

функція Z^* *пов'язана із функцією* Z *рівністю*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = Z(t,x;\tau,\xi), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{8}$$

і для Z *виконується формула згортки*

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\lambda,y)Z(\lambda,y;\tau,\xi)dy, \quad 0\le\tau<\lambda<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Зауважимо, що рівність (8) означає властивість нормальності ФРЗК.

Доведення теореми 2 базується на формулі Гріна-Остроградського

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{B_R}(\overline{v}Lu - u\overline{L^* v})(\theta,y)dy = \int\limits_{B_R}(\overline{v}u)(\theta,y)|_{\theta=t_1}^{t_2}dy -$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta \int\limits_{\Gamma_R}\left(\sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 y_{1s}\right)\mu_{2j}\right)(\overline{v}u)(\theta,y)dS_y + \int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta\int\limits_{\Gamma_R}\sum_{j=1}^{n_1} B^j[v,u](\theta,y)\mu_{1j}dS_y, \tag{10}$$

де $0\le t_1<t_2\le T$, B_R – сфера в $\mathbb{R}^n$ радіусу R з центром в початку координат, Γ_R – її межа, $(\mu_{11},...,\mu_{1n_1},\mu_{21},...,\mu_{2n_2})$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_R, $L := S_B - A(\theta,y,\partial_{y_1})$, $L^* := S_B^* - A^*(\theta,y,\partial_{y_1})$, $B^j[v,u]$, $j\in\{1,...,n_1\}$, – білінійні форми, які містять похідні за y_1 від u і v не вищого за $2b-1$ порядку; u і v – досить гладкі функції.

Перейшовши у формулі (10) до границі при $R\to\infty$, у випадку дійснозначних функцій ми отримаємо формулу

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(vLu - uL^*v)(\theta,y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(vu)(\theta,y)|_{\theta=t_1}^{t_2}dy. \tag{11}$$

Використовуючи оцінки з теореми 1 і подібні оцінки для Z^*, у формулі (11) ми можемо покласти $u(\theta,y)=Z(\theta,y;\tau,\xi)$, $v(\theta,y)=Z^*(\theta,y;t,x)$, $t_1=\tau+\varepsilon$ і $t_2=t-\varepsilon$, де ε – мале додатнє число. В одержаній рівності, прямуючи до границі при $\varepsilon\to 0$, отримаємо формулу (8).

Рівність (9) одержується подібним чином, тільки потрібно взяти $t_1 = \lambda$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(\lambda, y; t, x) Z(\lambda, y; \tau, \xi) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(t-\varepsilon, y; t, x) Z(t-\varepsilon, y; \tau, \xi) dy,$$

в якій необхідно перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ і використати формулу (8).

Теорема 3. (Єдиність класичного ФРЗК). *Існує тільки один нормальний класичний ФРЗК, для якого мають місце оцінки* (7).

Нехай Z_1 і Z_2 – два нормальні класичні ФРЗК для рівняння (1), для яких справджуються оцінки (7). Покладемо у формулу (11) $u(\theta, y) = Z_1(\theta, y; \tau, \xi)$, $v(\theta, y) = Z_2(t, x; \theta, y)$. Тоді одержимо рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_2, y; \tau, \xi) Z_2(t, x; t_2, y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t_1, y; \tau, \xi) Z_2(t, x; t_1, y) dy \tag{12}$$

для довільних t_1 і t_2 з інтервалу (τ, t). З довільності t_1 і t_2 випливає, що права і ліва частини в (12) не залежать ні від t_1, ні від t_2, і можна перейти до границі в (12), попрямувавши $t_1 \to \tau$, $t_2 \to t$. Зробивши це, ми отримаємо

$$Z_1(t, x; \tau, \xi) = Z_2(t, x; \tau, \xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що властивості КФРЗК для рівняння (5) з класу $\mathbf{E}_{22}^B$ ультрапараболічних рівнянь (другого порядку) досліджувалися у [1].

3 Коректна розв'язність задачі Коші

Розглянемо набори функцій $\mathbf{k}(t, \mathbf{a})$ і $\mathbf{s}(t)$, $t \in [0, T]$, які означимо таким способом:

$$\mathbf{k}(t, \mathbf{a}) := (k_1(t, a_1), k_2(t, a_2)),\ \mathbf{s}(t) := (s_1(t), s_2(t)),$$

$$k_i(t, a_i) := c_0 a_i (c_0^{2b-1} - a_i^{2b-1} t^{2b(i-1)+1})^{1-q},\ i \in \{1, 2\};$$

$$s_1(t) := k_1(t, a_1) + 2^{q-1} t^q \|B^1\|^q k_2(t, a_2), \quad s_2(t) := 2^{q-1} k_2(t, a_2),$$

де $q := 2b/(2b-1)$, $c_0 \in (0, c)$, c – стала з оцінок (7), $\mathbf{a} := (a_1, a_2)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $T < \min\limits_{i \in \{1,2\}} (c_0/a_i)^{(2b-1)/(2b(i-1)+1)}$, $\|B^1\|$ – норма матриці B^1. Запровадимо ще таке позначення:

$$[\mathbf{k}(t, \mathbf{a}), \xi)] := \sum_{i=1}^{2} k_i(t, a_i) |\xi_i|^2,\ t > 0,\ \xi_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ i \in \{1, 2\}.$$

Зауважимо, що правильними є співвідношення

$$\mathbf{k}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{a},\ k_i(t, a_i) \ge a_i,\ k_{ij}(t, a_{ij}) \ge a_{ij}, \quad t \in [0, T],\ j \in \{1, ..., n_i\},\ i \in \{1, 2\};$$

$$k_1(t-\tau, k_1(\tau, a_1)) = k_1(t, a_1),\ k_{1j}(t-\tau, k_{1j}(\tau, a_{1j})) = k_{1j}(t, a_{1j}), \quad j \in \{1, ..., n_1\};$$

$$k_2(t-\tau, k_i(\tau, a_i)) \leq k_2(t, a_i),\ k_{2j}(t-\tau, k_{2j}(\tau, a_{2j})) \leq k_{2j}(t, a_{2j}),\quad j \in \{1, ..., n_2\},$$

і справджується нерівність

$$-c_0 \sum_{i=1}^{2} t^{1-2i} |X_i(t) - \xi_i|^2 + [\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), \xi] \leq [\mathbf{k}(t, \mathbf{a}), X(t)],\quad t \in (0, T],\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Нехай $p \in [1, \infty]$ і $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна для будь-якого $t \in [0, T]$. Для кожного $t \in [0, T]$ означимо норми

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} := \|u(t, x) \exp\{-[\mathbf{k}(t, \mathbf{a}), X(t, 0)]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} := \|u(t, x) \exp\{-[\mathbf{s}(t), x]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Використовуватимемо також простори:

$L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$, $t \in [0, T]$, $p \in [1, \infty]$, – простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$;

$M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ – простір зліченно-адитивних функцій $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умову

$$\|\mu\|^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} := \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-[\mathbf{k}(0, \mathbf{a}), x]\} d|\mu|(x) < \infty,$$

де $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ – повна варіація μ;

$L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-\mathbf{s}(T)} := \|\psi(x) \exp\{-[\mathbf{s}(T), x]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

$C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що при $|x| \to \infty$ маємо $|\psi(x)| \exp\{[\mathbf{s}(T), x]\} \to 0$. Норму в $C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ означимо формулою

$$\|\psi\|_\infty^{-\mathbf{s}(T)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\psi(x)| \exp\{[\mathbf{s}(T), x]\}).$$

Враховуючи означення точок $X_i(t), i \in \{1, 2\}$, та нерівності (1.3.9), (1.3.10) з [7], маємо такі нерівності:

$$|X_2(t)|^2 = \left|x_2 + t((B^1)' x_1')'\right|^2 \leq 2\left(|x_2|^2 + t^2 |((B^1)' x_1')'|^2\right) \leq 2\left(|x_2|^2 + t^2 \|B^1\|^2 |x_1|^2\right),$$

та аналогічно

$$|X_{2j}(t)|^2 \leq 2\left(|x_{2j}|^2 + t^2 \|B^1\|^2 |x_{1j}|^2\right),\ j \in \{1, ..., n_2\}.$$

Із цих нерівностей випливає нерівність

$$\exp\{-[\mathbf{s}(t), x]\} \leq \exp\{-[\mathbf{k}(t, \mathbf{a}), x]\},$$

і тому

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} \leq \|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})},\quad t \in [0, T],\ p \in [1, \infty].$$

Оскільки за означенням $\mathbf{s}(t) \geq \mathbf{k}(0, \mathbf{a})$, $t \in [0, T]$, то для $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\mathbf{s}(t)} \leq \|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})},\quad t \in [0, T],\ p \in [1, \infty].$$

Теорема 4. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1) *виконуються умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$ *і* $p \in [1, \infty]$. *Тоді правильними є такі твердження:*

1) для будь-яких функцій $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ *формула*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{13}$$

визначає єдиний в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язок однорідного рівняння* (1);

існує стала $C > 0$, *яка не залежить від* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *така, що для довільного* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})};$$

для $p \in [1,\infty)$ *справджується рівність* $\lim\limits_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} = 0$, *а для* $p = \infty$ *– граничні співвідношення* $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx;$$

2) для будь-якої узагальненої міри $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$ *формула*

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

визначає єдиний в шарі $\Pi_{(0,T]}$ *розв'язок однорідного рівняння* (1);

існує стала $C > 0$, *яка не залежить від* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *така, що для довільного* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\mu\|^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})};$$

справджується граничне співвідношення $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \mu$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\mu(x).$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 4.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1$–$\mathbf{A}_4$ *і* u *– розв'язок в* $\Pi_{(0,T]}$ *однорідного рівняння* (1), *який задовольняє умову*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{k}(t,\mathbf{a})} \le C, \; t \in (0,T], \tag{15}$$

з деякими $C > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$. *Тоді для* $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\boldsymbol{k}(0,a)}$, *а для* $p = 1$ *– єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\boldsymbol{k}(0,\mathbf{a})}$, *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (13) *або* (14).

Нехай U_p, $p \in [1, \infty]$, – класи усіх розв'язків однорідного рівняння (1), які при кожному $t \in (0, T]$ належать до просторів $L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$ як функції x і для яких виконується умова (15). Із теорем 4 і 5 випливають такі важливі наслідки.

Наслідок 1. *Множинами початкових значень розв'язків із класів U_p, $p \in (1, \infty]$, та U_1 є відповідно простори $L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ та $M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і тільки вони.*

Наслідок 2. *Класи U_p, $p \in (1, \infty]$, і U_1 є множинами значень операторів Пуассона, визначених формулами* (13) *і* (14) *на просторах відповідно $L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ і $M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, причому ці оператори є ізоморфізмами.*

Для отримання результатів, сформульованих у теоремах 4 і 5, використовується методика, подібна до праці [7].

Висновки

У роботі розглянуто вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова довільного порядку з блочною структурою з однією групою виродження. Такі рівняння узагальнюють відповідні рівняння другого порядку, що виникають при дослідженнях азійських опціонів на ринку цінних паперів.

У статті сформульовано спеціальні умови Гельдера відносно просторових змінних на коефіцієнти рівнянь, за яких доведено існування класичного фундаментального розв'язку задачі Коші та ряд його властивостей: його оцінки і оцінки його похідних, нормальність, формулу згортки, єдиність нормального КФРЗК. Також отримано коректну розв'язність задачі Коші у спеціальних вагових просторах та інтегральне зображення класичних розв'язків однорідних рівнянь у вигляді інтегралів Пуассона від функцій або узагальнених мір, якими задається початкова умова. Описано класи коректності задачі Коші. При цьому одержано оцінки в спеціальних вагових нормах інтегралів Пуассона, породжених КФРЗК, та досліджена їх гранична поведінка.

Наведені результати є досить точними. З них, зокрема, випливає повна характеризація розглянутих класів розв'язків. Цим самим для таких розв'язків розв'язана задача, яка є важливою класичною задачею теорії аналітичних та гармонічних функцій. Вона полягає у відшуканні умов на розв'язки рівнянь, визначених в області, які гарантують існування їхніх граничних значень на межі області.

Зауважимо, що подібні вироджені параболічні рівняння з блочною структурою другого порядку вивчалися у [1] і [9], аналогічні результати для так званих L-розв'язків задачі Коші для таких рівнянь отримано в [6].

Отримані результати є реалізацією відомого підходу Ейдельмана–Івасишена [7]. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних вироджених параболічних рівнянь, а також у теорії марковських процесів, густиною ймовірності переходу яких є ФРЗК для рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^{B}$.

Список літератури

[1] Dron V.S., Medynskyi I.P. *On fundamental solution of the Cauchy problem for ultra-parabolic equations in the Asian options models.* Math. Modeling and Computing 2024, **11** (2), 593–606. https://doi.org/10.23939/mmc2024.02.593

[2] Kolmogoroff A. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung).* Ann.Math. 1934, **35**, No.1, 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123

[3] Pascucci A. *Kolmogorov Equations in Physics and in Finance.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications: Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland 2005, **63**, 313–324.

[4] Frentz M., Nyström K., Pascucci A., Polidoro S. *Optimal regularity in the obstacle problem for Kolmogorov operators related to American Asian options.* Math. Ann. 2010, **347**, 805–838. doi: 10.1007/s00208-009-0456-z

[5] Protsach N.P., Ptashnyk B.Yo. Nonlinear ultraparabolic equations and variational inequalities, Naukova dumka, Kyiv, 2017, 278 p. (in Ukrainian).

[6] Ivasyshen S.D., Layuk V.V. *Cauchy problem for some degenerated parabolic equations of Kolmogorov type.* Mat. Metody i Fiz.-Mekh. Polya 2007, **50** (3), 56–65 (in Ukrainian).

[7] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser. Basel 2004, Ser. Operator Theory: Adv. and Appl., Vol. 152. https://doi.org./10.1007/978-3-0348-7844-9.

[8] Ivasyshen S.D., Medynskyi I.P. *The fundamental solution of the Cauchy problem for generated parabolic Kolmogorov type equations of arbitrary order.* Mat. Metody i Fiz.-Mekh. Polya 2019, **62** (1), 7–24 (in Ukrainian).

[9] Dron V.S., Medynskyi I.P. *Cauchy problem for ultra-parabolic equations of Kolmogorov type with block structure.* Bukovinian Math. Journal 2024, **12** (1), 43–62 (in Ukrainian).

Надійшло 15.12.2024

Dron V.S.[1], Medynskyi I.P.[1,2] *Cauchy problem for degenerated parabolic equations of Kolmogorov type of arbitrary order with one group of degeneration*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 2 (2024), 69–79.

The investigation is devoted to degenerated parabolic equations of arbitrary order with block structure and with one group of degeneration. Such equations generalize the corresponding second-order equations that arise in the studying of Asian options on financial markets. Under some conditions they generalize well-known Kolmogorov's equation of diffusion with inertia.

In the work, for the given equations we study the classical fundamental solutions and solutions of the Cauchy problem. For the coefficients of the equations we apply special Hölder conditions with respect to spatial variables. Under these conditions, we prove such results as existing of classic fundamental solution of the Cauchy problem (further – CFSCP), the estimations of it and of its derivatives, the normality property, the convolution formula, the uniqueness of the normal CFSCP. Also, the well-posedness of the Cauchy problem in special weighed spaces, the integral presentation of classic solutions of the Cauchy problem for homogeneous equations (in the form of Poisson integrals of functions or generalized measures which are given by the initial condition) of classic solutions of the Cauchy problem for homogeneous equations are obtained. Limiting behavior of the Poisson integrals was investigated. Classes of well-posedness of the Cauchy problem are described.

The presented results are quite accurate. In particular, they lead to a complete characterization of the considered classes of solutions. It solves a problem for such solutions, which is an important classical problem of the theory of analytic and harmonic functions. It consists in finding conditions for solutions of equations defined in a domain that guarantee the existence of their limiting values on the boundary of the domain.

Previous, the similar degenerated parabolic second-order equations with block structure have been studied, and similar results for the so-called L-solutions of the Cauchy problem for such equations have been obtained.

The results obtained in the work are realization of well-known Eidelman–Ivasyshen approach. Ones can be used to advanced studying of the Cauchy problem and boundary value problems for linear and quasi-linear degenerated parabolic equations as well as in the theory of Markov processes, the transition probability density of which is the CFSCP for the second-order equations.