

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.15>

ВАСЬКЕВИЧ С.О., ВОВК Ю.Ю., ПРАЦЬОВИТИЙ О.М.

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ З НЕНУЛЬОВОЮ НАДЛИШКОВІСТЮ ТА ЇХ
ЗАСТОСУВАННЯ У ТЕОРІЇ ЛОКАЛЬНО СКЛАДНИХ ФУНКЦІЙ

У роботі розглядається зображення чисел у системі з основою $a > 1$ і алфавітом (набором цифр) $A \equiv \{0, 1, \dots, r\}$, $a - 1 < r \in \mathbb{N}$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{a^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in A.$$

За рахунок надлишкового алфавіту числа відрізка $[0; \frac{r}{a-1}]$ мають, взагалі кажучи, не єдине зображення і навіть можуть мати континуальну множину різних зображень.

Геометрію (тополого-метричні властивості) такого зображення (r_a -зображення) розкривають циліндри:

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r_a} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{r_a}, a_n \in A\},$$

властивості яких, включаючи специфіку перекриттів, детально висвітлено.

В роботі представлено результати дослідження структурних, варіаційних, тополого-метричних і частково фрактальних властивостей функції, означеної рівністю:

$$f(x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(r+1)^n}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in A.$$

Доведено її неперервність в точках відрізка $[0; 1]$, які в традиційній системі числення з основою $(r+1)$ мають єдине зображення, і розривність у точках зліченої всюди щільної в $[0; 1]$ множини, а також ніде не монотонність та необмеженість варіації функції.

Для випадку $r = 1$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ вказані фрактальні множини рівнів з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича не меншою $-\log_a 2$.

Ключові слова і фрази: системи числення з ненульовою надлишковістю, циліндр, класична s -символьна система, множина рівня функції, функція необмеженої варіації.

Institution of Mathematics of NAS Ukraine,
K. D. Ushynskyi Chernihiv Regional Institute of Postgraduate Pedagogical Education, Chernihiv, Ukraine
Ukrainian State Dragomanov University, Kyiv, Ukraine

e-mail: svetaklymchuk@gmail.com, freeeidea@ukr.net, o.m.pratsovytyi@udu.edu.ua

УДК 511.7+517.5

2010 *Mathematics Subject Classification*: 28A80, 11K50, 26A27, 26A30.

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586 V.S.)

ВСТУП

Більшість функцій, визначених на відрізку, мають локально складну структуру у контексті монотонності, варіаційних, диференціальних, тополого-метричних та фрактальних властивостей.

Крім неперервних ніде не монотонних, недиференційовних та сингулярних до локально складних ми відносимо функції, які мають зліченну всюди щільну у відрізку (області визначення) множину точок розриву. Одному з класів таких функцій присвячена дана робота.

Для задання функції ми використовуємо “нестандартний” інструмент – систему зображення чисел з надлишковим алфавітом і, взагалі кажучи, нецілою основою. Таким системам присвячено сотні статей [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], в яких розв’язуються різнопланові задачі (в основному метричної, включаючи фрактальну, та ймовірнісної теорії чисел). Їх застосування до потреб теорії функцій в цих роботах не прослідковується.

Нехай $1 < a$ – фіксоване дійсне число; $a - 1 \leq r$ – натуральне число; $A = \{0, 1, \dots, r\}$ – алфавіт; $L = A \times A \times \dots$ – множина послідовностей з елементів алфавіту.

Розглядається відображення $\gamma : L \rightarrow [0; \frac{r}{a-1}]$, а саме

$$\gamma((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{a^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a} = x \in \left[0; \frac{r}{a-1}\right], (\alpha_n) \in L.$$

Символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}$ ми називаємо r_a -зображенням числа x , при цьому α_n називаємо n -ою цифрою даного зображення. Випадок $r = 1$ заслуговує окремої уваги в силу мінімальності алфавіту A .

Якщо $a = r + 1$, то r_a -зображення є класичним зображенням чисел у системі з натуральною основою a , яке має нульову надлишковість (кожне число має не більше двох зображень, причому тих, що їх мають два лише зліченна множина).

Означення 1. При раціональному a число x , яке має r_a -зображення з періодом (0) , називатимемо r_a -раціональним.

Очевидно, що коли число a — раціональне, то r_a -зображення також раціональне.

Зрозуміло, що r_a -раціональне число є числом раціональним. Але не кожне раціональне число є r_a -раціональним. Наприклад, число x з чисто періодичним r_a -зображенням $\Delta_{(c_1 \dots c_p)}^{r_a}$ період якого складається принаймні з двох різних цифр є раціональним, але не є r_a -раціональним. Справді, число x як значення виразу

$$x = \Delta_{(c_1 \dots c_p)}^{r_a} = \left(\frac{c_1}{a} + \dots + \frac{c_p}{a^p}\right) + \frac{1}{a^p} \left(\frac{c_1}{a} + \dots + \frac{c_p}{a^p}\right) + \frac{1}{a^{2p}} \left(\frac{c_1}{a} + \dots + \frac{c_p}{a^p}\right) + \dots = \frac{c}{1 - \frac{1}{a^p}},$$

де $c = \frac{c_1}{a} + \dots + \frac{c_p}{a^p}$ є раціональним числом, але не є r_a -раціональним (взагалі кажучи).

Умова $r \geq a$ гарантує існування чисел, які мають більше двох зображень, і навіть континуальну їх множину, що породжує ненульову надлишковість даного $(r + 1)$ -символьного кодування чисел. Такі системи вивчаються з 1957 року, першими в цьому напрямі були роботи [1, 2]. Сьогодні системи кодування дійсних чисел з ненульовою надлишковістю інтенсивно вивчаються, існують сотні робіт їм присвячених [3, 4, 5]. В основному це системи, в яких основа a не є цілою. При цьому розглядаються різні об’єкти і розв’язуються різні задачі. Існує кілька відносно повних оглядів результатів цих досліджень [6], що стосуються теорії чисел і фрактального аналізу множин.

Дана теоретико-числова тематика тісно пов'язана з іншими напрямками сучасних досліджень: геометрією числових рядів, теорією нескінченних згорток Бернуллі, теорією динамічних систем та теорією функцій зі складною локальною будовою.

У системах з ненульовою надлишковістю вбачаємо потужний засіб для конструювання та дослідження математичних об'єктів з локально складною тополого-метричною структурою, зокрема функцій. Дана робота має за мету продемонструвати такі можливості.

1 ГЕОМЕТРІЯ r_a -ЗОБРАЖЕННЯ

Кожна пара параметрів a, r породжує свою унікальну геометрію і специфіку перекриттів. Її частково висвітлюють властивості циліндричних множин. Окремої уваги заслуговують випадки: a — число натуральне; a — раціональне; a — ірраціональне.

Означення 2. Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ — фіксований впорядкований набір елементів алфавіту. Циліндром (r_a -циліндром) рангу k з основою $c_1 c_2 \dots c_k$ називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{r_a} = \{x : x = \Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, (\alpha_n) \in L\}.$$

Циліндри $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} j}^{r_a}$ і $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} [j+1]}^{r_a}$, $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ називаються сусідніми, вони належать одному і тому ж циліндру попереднього рангу $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1}}^{r_a}$.

Циліндри мають властивості:

- 1) $\Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_k 0}^{r_a} \cup \Delta_{c_1 \dots c_k 1}^{r_a} \cup \dots \cup \Delta_{c_1 \dots c_k r}^{r_a}$;
- 2) $\Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a} = [u; u+d]$, де $u = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{a^i}$, $d = \frac{r}{a^k \cdot (a-1)}$;
- 3) довжина циліндра: $|\Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a}| = d = \frac{r}{a^k \cdot (a-1)} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$);
- 4) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k \dots}^{r_a} = x$ для будь-якої послідовності $(c_k) \in L$;
- 5) $\min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k c} < \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_k [c+1]}$, $0 \leq c \leq r-1$;
- 6) $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{r_a} = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{r_a} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k a^{-i} (\alpha_i - \beta_i) = 0$;
- 7) $\Delta_{c_1 \dots c_k c}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_k [c+1]}^{r_a} = [\Delta_{c_1 \dots c_k [c+1]}^{r_a}(0); \Delta_{c_1 \dots c_k c(r)}^{r_a}] \neq \emptyset$;
- 8) довжина перекриття:

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1]}^{r_a}| = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c(r)}^{r_a} - \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1](0)}^{r_a} = \frac{r-a+1}{a^k(a-1)};$$

- 9) умова $\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1]}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} cr}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1]0}^{r_a}$ рівносильна

$$\frac{c}{a^k} + \frac{r}{a^{k+1}} = \frac{c+1}{a^k}, \quad \text{тобто } r = a,$$

що може виконуватись лише при цілих a ;

- 10) рівність $|\Delta_{c_1 \dots c_k c_{k+1}}^{r_a}| = \frac{1}{2} |\Delta_{c_1 \dots c_k}^{r_a}|$ виконується лише за умови $a = 2$;

- 11) умова $\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1]}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c \underbrace{r \dots r}_m}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c+1] \underbrace{0 \dots 0}_m}^{r_a}$ рівносильна

$$\frac{c}{a^k} + \frac{r}{a^{k+1}} + \dots + \frac{r}{a^{k+m}} = \frac{c+1}{a^k}, \quad \text{тобто } r = \frac{a^m(a-1)}{a^m-1}.$$

Зауваження 1. Властивості 8)–11) виражають специфіку перекриттів r_a -циліндрів.

2 ОДИН ОСОБЛИВИЙ ВИПАДОК

Розглянемо випадок $r = 2$. Тоді $1 < a < 3$.

Теорема 1. Якщо $r = 2$, то множина

$$C \equiv C[r_a; \{0, 2\}] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in \{0, 2\} \ n \in N\}$$

є досконалою ніде не щільною самоподібною множиною канторівського типу, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої рівна $-\log_a 2$.

Доведення. Використовуючи циліндри r_a -зображення, легко описати структуру множини C , а саме:

$$1. C \subset [\Delta_0^{r_a} \cup \Delta_2^{r_a}], \text{ причому } \Delta_0^{r_a} \cap \Delta_2^{r_a} = \emptyset,$$

$$\max\{\Delta_0^{r_a}\} = \Delta_{0(2)}^{r_a} \in C, \quad \min\{\Delta_2^{r_a}\} = \Delta_{2(0)}^{r_a} \in C.$$

$$2. \Delta_{c_1 \dots c_m}^{r_a} \supset (\Delta_{c_1 \dots c_m 0}^{r_a} \cup \Delta_{c_1 \dots c_m 2}^{r_a}), \quad \Delta_{c_1 \dots c_m 0}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_m 2}^{r_a} = \emptyset.$$

$$3. C \subset C_n, C_n = \bigcup_{\alpha_1 \in V} \dots \bigcup_{\alpha_n \in V} \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{r_a}, V = \{0, 2\} \ \forall n \in N.$$

$$4. C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Згідно з відомою теоремою про структуру досконалих множин робимо висновок, що множина C є досконалою і ніде не щільною (не містить жодного як завгодно малого інтервалу).

Множина C є самоподібною, оскільки

$$C = [\Delta_0^{r_a} \cap C] \cup [\Delta_1^{r_a} \cap C],$$

$$\text{де } C \overset{k}{\sim} (\Delta_0^{r_a} \cap C) \cong (\Delta_2^{r_a} \cap C), k = \frac{r}{a-1} : |\Delta_0^{r_a}| = \frac{1}{(a-1)} : \frac{1}{a(a-1)} = a.$$

Її самоподібна розмірність є розв'язком рівняння $2 \cdot a^x = 1$, тобто $x = -\log_a 2$. Вона рівна розмірності Гусдорфа-Безиковича, оскільки множина C задовольняє умову відкритої множини. Теорему доведено. $\square$

3 ФУНКЦІЯ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ МНОЖИН РІВНІВ

Розглядається функція f , означена рівністю $f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r+1}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}$, де

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(r+1)^n}, (\alpha_n) \in L.$$

Оскільки числа зліченної множини у системі з основою $r+1$ мають два формально різні зображення: $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (0)}^{r+1} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_n - 1] (r)}^{r+1}$ (їх ми називаємо $(r+1)$ -бінарними), то за для коректності означення функції f домовимось використовувати лише перше з вказаних зображень $(r+1)$ -бінарного числа.

Теорема 2. Функція f є неперервною у кожній $(r+1)$ -унарній точці і неперервною в $(r+1)$ -бінарній точці тоді і лише тоді, коли $a = r+1$.

Доведення. Якщо функція f неперервна на відрізку, то вона неперервна в кожній точці цього відрізка. Нехай $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r+1}$ — $(r+1)$ -унарна точка. Нехай $f(x_0) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}$. Розглянемо точку x , що не рівна x_0 , тоді з $x \neq x_0$ слідує, що існує такий номер k , що $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(x_0)$, але $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ для усіх $i < k$, причому умова $k \rightarrow \infty$ рівносильна $x \rightarrow x_0$. Для обґрунтування неперервності функції f_a в точці x_0 покажемо, що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

Згідно з означенням функції f маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| &= \lim_{x \rightarrow x_0} |f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha'_k \alpha'_{k+1} \dots}^{r_a}) - f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{r_a})| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha'_k \alpha'_{k+1} \dots}^{r_a} - \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{r_a}| \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{k-1}} |\Delta_{\alpha'_k \alpha'_{k+1} \dots}^{r_a} - \Delta_{\alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{r_a}| = 0. \end{aligned}$$

Отже, функція f неперервна в $(r+1)$ -унарній точці.

Неперервність функції в кожній $(r+1)$ -бінарній точці рівносильна виконанню рівності для будь-якого $k \in N$

$$f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k(0)}^{r+1}) = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} [\alpha_k - 1](r)}^{r+1}), \text{ для будь-якого } k \in N.$$

Останню рівність можна переписати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{a^i} + \frac{\alpha_k}{a^k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{a^i} + \frac{\alpha_k - 1}{a^k} + \frac{r}{a^2 - a},$$

звідки

$$\frac{\alpha_k}{a^k} = \frac{\alpha_k - 1}{a^k} + \frac{r}{a^2 - a},$$

що можливо лише за умови $a = r + 1$. Тобто функція f неперервна в кожній $(r+1)$ -бінарній точці тоді і лише тоді, коли $a = r + 1$. $\square$

Зауваження 2. Зазначимо, що коли $a = r + 1$, тобто r_a -зображення співпадає з $(r+1)$ -зображенням, то $f(x) = x$.

Теорема 3. Якщо $a < r + 1$, то функція f є ніде не монотонною.

Доведення. Можливі випадки: 1) $1 < a \leq r$; 2) $a \in (r; r+1)$. Для доведення ніде не монотонності функції досить довести її немонотонність на довільному циліндрі m -го рангу. Для конкретності розглянемо циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r+1} = [\Delta_{c_1 \dots c_m(0)}^{r+1}; \Delta_{c_1 \dots c_m(r)}^{r+1}]$.

1) Нехай $1 < a \leq r$, тоді $r+1-a \geq 1$. Розглянемо на циліндрі $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r+1}$ точки $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m(0)}^{r+1}$, $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m r 0(r-1)}^{r+1}$, $x_3 = \Delta_{c_1 \dots c_m r 1(0)}^{r+1}$. Очевидно, що $x_1 < x_2 < x_3$. Розглянемо різниці

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= f(x_2) > 0, \\ f(x_2) - f(x_3) &= \frac{r}{a^{m+1}} + \frac{r}{a^{m+3}} + \frac{r-1}{a^{m+3}(a-1)} - \frac{r}{a^{m+1}} - \frac{1}{a^{m+2}} = \\ &= \frac{r(a-1) + r-1 - a(a-1)}{a^{m+3}(a-1)} = \frac{ra - r + r - 1 - a^2 + a}{a^{m+3}(a-1)} = \\ &= \frac{a(r+1-a) - 1}{a^{m+3}(a-1)} \geq \frac{a-1}{a^{m+3}(a-1)} > 0. \end{aligned}$$

Оскільки $(f(x_2) - f(x_1))(f(x_2) - f(x_3)) > 0$, то функція f немонотонна на циліндрі $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r+1}$, а в силу довільності вибору $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r+1}$ ніде не монотонна на усій області визначення.

2) Нехай $a \in (r; r+1)$, тоді $r+1-a > 0$.

$\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r+1} = [\Delta_{c_1 \dots c_m(0)}^{r+1}; \Delta_{c_1 \dots c_m(r)}^{r+1}]$. Розглянемо точки $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m(0)}^{r+1}$, $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m 0 \underbrace{r \dots r}_n}^{r+1}$, $x_3 = \Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{r+1}$. Очевидно, що $x_1 < x_2 < x_3$. Розглянемо різниці

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{a^m} \left(\frac{r}{a} + \dots + \frac{r}{a^n} \right) > 0,$$

$$\begin{aligned} f(x_3) - f(x_2) &= \frac{1}{a^m} \left(\frac{1}{a} - \frac{r}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \left(1 - \frac{1}{a^n} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{a^m} \left(\frac{1}{a} - \frac{r}{a(a-1)} \left(1 - \frac{1}{a^n} \right) \right) = \frac{1}{a^m} \left(\frac{a-1-r}{a(a-1)} + \frac{r}{a^{n+1}}(a-1) \right). \end{aligned}$$

Нехай $\frac{r-(a-1)}{a(a-1)} = c > 0$. Тоді

$$a^m(f(x_3) - f(x_2)) = \frac{a-1-r}{a(a-1)} + \frac{r}{a^{n+1}(a-1)} = \frac{r}{a^{n+1}(a-1)} - c.$$

Оскільки $\frac{r}{a^{n+1}(a-1)}$ монотонно прямує до 0, то існує n_0 таке, що для всіх $n > n_0$ виконуватиметься нерівність $\frac{r}{a^{n+1}(a-1)} < c$. Для таких $f(x_3) - f(x_2) < 0$. Оскільки

$$(f(x_2) - f(x_1))(f(x_3) - f(x_2)) < 0,$$

то на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r_a}$ функція $f(x)$ не є монотонною. Отже, вона ніде не монотонна. $\square$

Теорема 4. Якщо $a < r+1$, то функція f має необмежену варіацію.

Доведення. Нехай $\Delta \equiv [0; \frac{r}{a-1}]$. Коливання функції f на циліндрі $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r+1}$ дорівнює довжині циліндра $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r_a}$, що є образом циліндра $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r+1}$. Тому варіація функції f перевищує сумарну довжину циліндрів образів, тобто

$$V(f) > V_k = \sum_{\alpha_1=0}^r \sum_{\alpha_2=0}^r \dots \sum_{\alpha_n=0}^r |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r_a}|.$$

Оскільки

$$V_1 \equiv \sum_{\alpha_1=0}^r |\Delta_{\alpha_1}^{r_a}| = (r+1) \frac{r}{a(a-1)} > \frac{ar}{a(a-1)} = \frac{r}{a-1} = |\Delta| > 1.$$

Тоді

$$k \equiv \frac{V_1}{|\Delta|} > 1 \text{ і } V_1 = k|\Delta|.$$

Аналогічно,

$$\sum_{\alpha_2=0}^r |\Delta_{c_1 \alpha_2}^{r_a}| = |\Delta_{c_1}^{r_a}| \sum_{\alpha_2=0}^r |\Delta_{\alpha_2}^{r_a}| > |\Delta_{c_1}^{r_a}|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} V_2 \equiv \sum_{\alpha_1=0}^r \sum_{\alpha_2=0}^r |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{r_a}| &= \sum_{\alpha_1=0}^r |\Delta_{\alpha_1}^{r_a}| \sum_{\alpha_2=0}^r |\Delta_{\alpha_2}^{r_a}| > k^2 |\Delta|, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$V_n = \sum_{\alpha_1=0}^r \sum_{\alpha_2=0}^r \cdots \sum_{\alpha_n=0}^r |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{r_a}| > k^n |\Delta|,$$

то

$$V(f) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} V_n > \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |\Delta| = \infty.$$

Отже, функція f має необмежену варіацію. $\square$

4 ДВОСИМВОЛЬНІ СИСТЕМИ

Випадок $r = 1$ в силу мінімальності алфавіту заслуговує на окрему увагу. Зосередимо інтерес на цьому випадку. Тому далі $1 < a < 2$. У цьому випадку маємо

$$|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r_a}| = \frac{1}{a^m(a-1)};$$

$$|\Delta_0^{r_a} \cap \Delta_1^{r_a}| = |[\Delta_{1(0)}^{r_a}; \Delta_{0(1)}^{r_a}]| = \Delta_{0(1)}^{r_a} - \Delta_{1(0)}^{r_a} = \frac{2-a}{a(a-1)};$$

$$\begin{aligned} |\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{r_a}| &= |[\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{r_a}; \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0(1)}^{r_a}]| = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0(1)}^{r_a} - \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{r_a} = \\ &= \frac{2-a}{a^m(a-1)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що існують окремі цікаві випадки. Наприклад, рівність

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{r_a}| = \frac{1}{2} |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{r_a}|$$

виконується лише за умови $a = \frac{3}{2}$.

Справді, у цьому випадку виконується рівність $\frac{2-a}{a^m(a-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^m(a-1)}$, що рівносильно умові $a = \frac{3}{2}$. За цієї умови $[0; \frac{r}{a-1}] = [0; 2]$. Цей випадок заслуговує окремого розгляду.

Інший **унікальний випадок**: $r = 1$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. З'ясуємо, за яких умов два сусідні циліндри m -го рангу перетинаються по циліндру $(m+2)$ -го рангу, тобто коли

$$\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{r_a} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 011}^{r_a} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 100}^{r_a}. \quad (1)$$

Ранги циліндрів $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 011}^{r_a}$ і $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 100}^{r_a}$ рівні, тому для рівності циліндрів досить, щоб збігалися їхні початки, тобто щоб

$$\min \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 011}^{r_a} - \min \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 100}^{r_a} = 0.$$

А це рівносильно рівності

$$\frac{1}{a^{m-1}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a} \right) = 0,$$

тобто $a + 1 - a^2 = 0$, яка виконується лише при одному додатному $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Оскільки

$$\max \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0}^{r_a} = \max \Delta_{011}^{r_a}, \min \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1}^{r_a} = \min \Delta_{100}^{r_a},$$

то необхідною і достатньою умовою для виконання (1) є $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Зауваження 3. Впорядковані трійки чисел $(1, 0, 0)$ і $(0, 1, 1)$ у r_a -зображенні числа при $r = 1$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, в якості послідовних цифр зображення є взаємозамінними.

Теорема 5. Якщо $r = 1$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ рівня $y_0 = \Delta_{(100)}^{r_a}$ є континуальною і має фрактальну розмірність не меншу числа $\frac{1}{3}$.

Доведення. Згідно останнього зауваження число $\Delta_{(100)}^{r_a}$, зображення якого має період (100), має континуальну множину різних r_a -зображень, оскільки кожна трійка (1, 0, 0) послідовних цифр без втрати значення може бути замінена альтернативною (0, 1, 1). Тому множина прообразів $y_0 = \Delta_{(100)}^{r_a}$ при відображенні $y = f(x)$ містить підмножину чисел відрізка $[0; 1]$, класичне вісімкове зображення яких використовує лише дві цифри 4 і 5.

Справді,

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3}\right) + \left(\frac{\alpha_4}{2^4} + \frac{\alpha_5}{2^5} + \frac{\alpha_6}{2^6}\right) + \left(\frac{\alpha_7}{2^7} + \frac{\alpha_8}{2^8} + \frac{\alpha_9}{2^9}\right) + \dots = \\ &= \frac{4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{2^3} + \frac{4\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6}{2^6} + \frac{4\alpha_7 + 2\alpha_8 + \alpha_9}{2^9} + \dots \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} = \frac{4}{2^3}, \quad \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{5}{2^3},$$

то одним з прообразів числа $y_0 = \Delta_{(100)}^{r_a} \in x_0 = \Delta_{(4)}^8$, іншим $\Delta_{(5)}^8$ і $\Delta_{(45)}^{r_a}$ і т.д. Отже, вся множина канторівського типу

$$C[8; \{4, 5\}] = \{x : x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^8, \text{ де } a_n \in \{4, 5\}\}$$

належить множині рівня. Її самоподібна розмірність та розмірність Гаусдорфа-Безиковича збігаються і рівні $\log_8 2 = \frac{1}{3}$. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] A. Renyi Representations for real numbers and their ergodic properties, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 8 (1957), 477-493.
- [2] W. Parry On the β -expansions of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 11 (1960), 401-416.
- [3] Pratsiovytyi M. V. Two symbol encodign of real numbres and its aplications. Nauk. Dumka, Kyiv 2022, 316 p.
- [4] Goncharenko Ya. V., Mykytiuk I. O Representations of real numbers in numeral systems with redundant set of digits and their applications. Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky, 2004, 5, 255-275. (in Ukrainian).
- [5] Derong Kong, Wenxia Li, Fan Lu, Zhiqiang Wang, Jiayi Xu Univoque bases of real numbers: Local dimension, Devil's staircase and isolated points, Advances in Applied Mathematics, Volume 121, 2020,
- [6] Zou Y., Lu J., Komornik V. Hausdorff dimension of multiple expansions. Journal of Number Theory, 2022, 233, pp.198-227. ff10.1016/j.jnt.2021.06.009
- [7] Pratsiovytyi M. V., Ratushniak S. P. Singular distributions of random variables with independent digits of representation in numeral system with natural base and redundant alphabet. Matematychni Studii 2025, 63 (2), 199-209. doi:http://doi.org/10.30970/ms.63.2.199-209
- [8] Pratsiovytyi M. V., Makarchuk O. P. Distribution of random variable represented by a binary fraction with three identically distributed redundant digits, Ukrainian Mathematical Journal 2022, 66 (1), 79-88
- [9] Mykytyuk I. O., Pratsiovytyi M. V. The binary numeral system with two redundant digits and its corresponding metric theory of numbers, Scientific Notes of M. P. Dragomanov National Pedagogical University. Series: Physical and Mathematical Sciences, 2003, vol. 4, 270-290.

- [10] *Pratsiovytyi M.V.* Convolutions of singular distributions, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1996, vol. 5 (5), 36–42.

Надійшло 11.11.2025

Vaskevych S.O., Vovk Yu.Yu., Pratsiovytyi O.M. *Numeral systems with non-zero redundancy and their applications in the theory of locally complex functions*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 152–160.

In this paper we study representations of real numbers in a numeral system with the base $a > 1$ and alphabet (digits set) $A \equiv \{0, 1, \dots, r\}$, $a - 1 < r \in N$ given by

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{a^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in A.$$

Since the alphabet is redundant the numbers from the interval $[0; \frac{r}{a-1}]$ have not a single representation and can even have a continuous set of different representations.

We describe the geometry (topological and metric properties) of such representations (the r_a -representations) in terms of cylinders defined by

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{r_a} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{r_a}, a_n \in A\},$$

We analyze their properties in detail, including the specific nature of overlaps.

We present results on the structural, variational, topological, metric and partially fractal properties of the function defined by

$$f\left(x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(r+1)^n}\right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_a}, \alpha_n \in A.$$

We prove the function is continuous at all points of the interval $[0, 1]$ that have a unique representation in the classical numeral system on the base $r + 1$ and prove the function is discontinuous at points of a countable everywhere dense set in $[0, 1]$. Furthermore, we show that the function is nowhere monotonic and has unlimited variation.

In the particular case $r = 1$ and $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, we specify fractal level sets with Hausdorff–Besicovitch dimension not less than $-\log_a 2$.