

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНУ МАТРИЦЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З НЕОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Означені дисипативні $\vec{2b}$ -параболічні системи з виродженнями на початковій гіперплощині. Для таких систем побудована фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші та одержані для неї і її похідних оцінки.

The dissipative $\vec{2b}$ -parabolic systems with degenerations on the initial hyperplane are defined. The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem are constructed and the estimates for it and for its derivatives are obtained.

Одним з найважливіших понять у теорії задачі Коші для параболічних систем є поняття фундаментальної матриці розв'язків (ф.м.р.). Найповніші результати для ф.м.р. задачі Коші на даний час одержано для рівномірно параболічних за Петровським систем з обмеженими геллеровими коефіцієнтами. Ці результати узагальнювались на випадок $\vec{2b}$ -параболічних систем [1–3], в яких кожна просторова змінна має, взагалі кажучи, свою вагу відносно часової змінної, параболічних за Петровським систем, коефіцієнти яких можуть необмежено зростати при $|x| \rightarrow \infty$ [4–8], і параболічних за Петровським та $\vec{2b}$ -параболічних систем з обмеженими коефіцієнтами при наявності певних вироджень на початковій гіперплощині [9–13]. При вивченні задачі Коші із зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами були введені дисипативні параболічні системи [4]. Ця стаття присвячена поширенню поняття дисипативності на $\vec{2b}$ -параболічні системи з виродженнями на початковій гіперплощині й дослідженню ф.м.р. задачі Коші для таких систем. Результати статті анонсовані в [11, 14, 15].

1. Нехай $n, b_1, \dots, b_n, N$ – задані натуральні числа; $\vec{2b} \equiv (2b_1, \dots, 2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_n$; $m_j \equiv$

$\equiv s/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $1 \leq j \leq n$, $q' \equiv \min_{1 \leq j \leq n} q_j$, $q'' \equiv \max_{1 \leq j \leq n} q_j$, $M \equiv \sum_{j=1}^n m_j$; T – задане додатне число; $\mathbf{Z}_+^n$ – множина всіх n -вимірних мультиіндексів. Якщо $x \in \mathbf{R}^n$, то $x_1, \dots, x_n$ – координати точки x . Користуватимемось ще такими позначеннями: $\|k\| \equiv \sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо $k \in \mathbf{Z}_+^n$; $p(x, y) \equiv (\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^{2/m_j})^{1/2}$, $q(x, y) \equiv (\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^{q_j})^{1/q''}$ – спеціальні відстані між точками x і y з $\mathbf{R}^n$; $\Pi_H \equiv \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbf{R}^n\}$, I – одинична матриця порядку N ; $\Delta_x^\xi f(\cdot, x, \cdot) \equiv f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, \xi, \cdot)$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(Lu)(t, x) \equiv \left(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t) \sum_{\|k\| \leq 2s} a_k(t, x) \partial_x^k - b(t, x) \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (1)$$

де a_k , $\|k\| \leq 2s$, b – квадратні матриці порядку N ; $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$, $\beta : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ – неперервні функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0, T]$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна.

Для того щоб сформулювати припущення щодо коефіцієнтів системи (1), розгляне-

мо відповідну системі (1) систему без вироджень і без члена з коефіцієнтом b

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k|| \leq 2s} a_k(t, x) \partial_x^k\right) u(t, x) = 0, \\ (t, x) \in \Pi_{(0, T]}. \quad (2)$$

Означення 1. Систему (2) називатимемо дисипативною $\vec{2B}$ -параболічною в $\Pi_{[0, T]}$, якщо існує неперервна функція $D : \mathbf{R}^n \rightarrow [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

- 1) $D(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$;
- 2) функції $b_k(t, x) \equiv a_k(t, x)(D(x))^{||k||-2s}$, $(t, x) \in \Pi_{[0, T]}$, $||k|| \leq 2s$, обмежені;
- 3) система рівнянь

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t, x) \times \right. \\ \left. \times \partial_x^k (-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}\right) v = 0$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} є рівномірно на $\Pi_{[0, T]} \times \mathbf{R}$ $\vec{2B}$ -параболічною, де $\vec{2B} \equiv (2b_1, \dots, 2b_n, 2s)$, тобто p -корені рівняння

$$\det \left(Ip - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t, x) (i\sigma)^k \mu^{k_{n+1}} \right) = 0$$

задовольняють умову

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (t, x) \in \Pi_{[0, T]} \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}^n \quad \forall \mu \in \mathbf{R} :$$

$$\operatorname{Re} p(t, x, \sigma, \mu) \leq -\delta \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^{2b_j} + \mu^{2s} \right).$$

Функція D при цьому називається характеристикою дисипації системи (2).

Припустимо, що виконуються наступні умови на коефіцієнти a_k , $||k|| \leq 2s$, b і характеристику дисипації D .

α_1 . Відповідна системі (1) система (2) є дисипативною $\vec{2B}$ -параболічною в $\Pi_{[0, T]}$ системою з характеристикою дисипації D .

α_2 . $\exists C > 0 \quad \exists \lambda \in (0, 1] \quad \forall \{(t, x), (t, y)\} \subset \Pi_{[0, T]} \quad \forall k \in \mathbf{Z}_+^n, ||k|| \leq 2s : |\Delta_x^y a_k(t, x)| \leq C(p(x, y))^\lambda ((D(x))^{2s-||k||} + (D(y))^{2s-||k||})$;

функції b_k , $||k|| \leq 2s$, які визначені в $\Pi_{[0, T]}$, є неперервними за t рівномірно щодо $x \in \mathbf{R}^n$.

α_3 . Функція b визначена в $\Pi_{[0, T]}$, обмежена, неперервна за t і задовольняє таку умову Гельдера:

$$\exists C > 0 \quad \forall \{(t, x), (t, y)\} \subset \Pi_{[0, T]} :$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq C(p(x, y))^\lambda,$$

де число λ з умови α_2 .

α_4 . Характеристика дисипації D задовольняє такі умови:

1) $\exists C > 0 \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}^n, q(x, y) \leq 1 : D(x) \leq CD(y)$;

2) $\exists C > 0 \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}^n, q(x, y) > 1 : D(x) \leq C \exp\{\epsilon \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| (D(y))^{m_j}\}$, де ϵ – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

Нехай $g : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ – функція, яка зв'язана з характеристикою дисипації D умовою

α_5 . Функція g має похідні $\partial_x^k g$, $||k|| \leq 2s$, для яких справджуються нерівності

$$|\partial_x^k g(x)| \leq C\eta(D(x))^{||k||},$$

$$|\Delta_x^y \partial_x^k g(x)| \leq$$

$$\leq C\eta(p(x, y))^\lambda ((D(x))^{||k||} + (D(y))^{||k||}),$$

$$\{x, y\} \subset \mathbf{R}^n, \quad 0 < ||k|| \leq 2s,$$

де $C > 0$, $\lambda \in (0, 1]$, η – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

Оскільки система (1) при $t = 0$ вироджується, то не завжди для неї можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайному розумінні. Але можна говорити про ф.м.р. задачі Коші згідно з таким означенням.

Означення 2. Ф.м.р. задачі Коші для системи (1) називається квадратна матриця порядку N $Z(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}^n$, така, що формулою

$$u(t, x) = \int_{\mathbf{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]},$$

визначається розв'язок системи (1), який задовольняє умову

$$u(t, x) \Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in (0, T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ .

Основний результат цієї статті стосується побудови та одержання оцінок ф.м.р. задачі Коші для дисипативної системи (1).

2. Щоб побудувати ф.м.р. задачі Коші для системи (1), скористаємось процедурою Леві. Для цього спочатку опишемо головний член формули для ф.м.р.

Розглянемо допоміжну систему

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \times \right. \\ & \times \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t, y) \partial_x^k (-i \partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}} - \\ & \left. - b(t, y) \right) v(t, x, x_{n+1}) = 0, \\ & (t, x, x_{n+1}) \in \Pi_{(0,T]} \times \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (3)$$

де y – фіксована точка простору $\mathbf{R}^n$.

За умов $\alpha_1 - \alpha_3$ на підставі результатів з [11–13] існує ф.м.р. $Z_0(t, x; \tau, \xi; x_{n+1} - \xi_{n+1}; y)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n$, $\{x_{n+1}, \xi_{n+1}\} \subset \mathbf{R}$, задачі Коші для системи (3), для якої правильні оцінки

$$\begin{aligned} & |\partial_x^k \partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}} Z_0(t, x; \tau, \xi; x_{n+1} - \xi_{n+1}; y)| \leq C_{kk_{n+1}} \times \\ & \times (B(t, \tau))^{-(M+1+||k||+k_{n+1})/(2s)} E_c^d(t, \tau, x - \xi) \times \\ & \times \exp\{-c(B(t, \tau))^{1-q_{n+1}} |x_{n+1} - \xi_{n+1}|^{q_{n+1}}\}, \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \\ & \{x_{n+1}, \xi_{n+1}\} \subset \mathbf{R}, \end{aligned}$$

де $k \in \mathbf{Z}_+^n$ і $k_{n+1} \in \mathbf{Z}_+^1$ довільні, $C_{kk_{n+1}} > 0$, $c > 0$ і $d \in \mathbf{R}$ – деякі сталі; $q_{n+1} \equiv \frac{2s}{2s-1}$; $A(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$, $B(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$, $E_c^d(t, \tau, x) \equiv E_c(t, \tau, x) E^d(t, \tau)$, $E_c(t, \tau, x) \equiv \exp\{-c \sum_{j=1}^n (B(t, \tau))^{1-q_j} |x_j|^{q_j}\}$, $E^d(t, \tau) \equiv \exp\{dA(t, \tau)\}$, $0 < \tau < t \leq T$, $x \in \mathbf{R}^n$. При цьому, зокрема, функція $\partial_x^k Z_0(t, x; \tau, \xi; z; y)$,

$z = z_1 + iz_2 \in \mathbf{C}$, як функція аргументу $B(t, \tau)^{-1/(2s)} z$ при фіксованих t, τ, x, ξ є цілою функцією, для якої справджуються оцінки

$$\begin{aligned} & |\partial_x^k Z_0(t, x; \tau, \xi; z; y)| \leq C_k \times \\ & \times (B(t, \tau))^{-(M+1+||k||)/(2s)} E_c^d(t, \tau, x - \xi) \times \\ & \times \exp\{-c(B(t, \tau))^{1-q_{n+1}} |z_1|^{q_{n+1}} + \\ & + c'(B(t, \tau))^{1-q_{n+1}} |z_2|^{q_{n+1}}\}, \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi, y\} \subset \mathbf{R}^n, \quad z \in \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $C_k > 0$, $c > 0$, $c' > 0$, $d \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}_+^n$.

Нехай $\hat{Z}_0(t, x; \tau, \xi; \eta; y)$ – перетворення Фур'є матриці $Z_0(t, x; \tau, \xi; z; y)$ за z . Тоді матриця $\hat{Z}_0(t, x; \tau, \xi; \eta; y)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n$, є ф.м.р. задачі Коші для системи

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t, y) \eta^{k_{n+1}} \partial_x^k - \right. \\ & \left. - b(t, y) \right) \hat{v}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \end{aligned}$$

для довільно фіксованих точок $\eta \in \mathbf{R}$ і $y \in \mathbf{R}^n$.

З оцінок (4) на підставі леми 1.1 з [5] випливають такі оцінки:

$$\begin{aligned} & |\partial_x^k \hat{Z}_0(t, x; \tau, \xi; \eta; y)| \leq \\ & \leq C_k (B(t, \tau))^{-(M+||k||)/(2s)} \times \\ & \times E_c^d(t, \tau, x - \xi) \exp\{-cB(t, \tau) \eta^{2s}\}, \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi, y\} \subset \mathbf{R}^n, \\ & \eta \in \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{Z}_+^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Візьмемо

$$\hat{Z}(t, x; \tau, \xi; y) \equiv \hat{Z}_0(t, x; \tau, \xi; D(y); y).$$

За допомогою оцінок (5) одержуються оцінки

$$\begin{aligned} & |\partial_x^k \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; y)| \leq C_k (B(t, \tau))^{-(M+||k||)/(2s)} \times \\ & \times E_c^d(t, \tau, x - \xi) \exp\{-cB(t, \tau) (D(y))^{2s}\}, \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi, y\} \subset \mathbf{R}^n, \quad k \in \mathbf{Z}_+^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Зауважимо, що матриця $\hat{Z}(t, x; \tau, \xi; y)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x, \xi, y\} \subset \mathbf{R}^n$, є ф.м.р. задачі Коші для системи

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{\|k\| \leq 2s} a_k(t, y) \partial_x^k - \right. \\ & \left. - b(t, y) \right) v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (7) \end{aligned}$$

для кожної фіксованої точки $y \in \mathbf{R}^n$. Для ф.м.р. $\hat{Z}$ правильні твердження, аналогічні відповідним твердженням з [10] (див. властивості 1–6). Наведемо два з них.

Твердження 1. *Нехай коефіцієнти системи (7) задовольняють умови $\alpha_1 - \alpha_3$. Тоді правильна оцінка*

$$\begin{aligned} & \left| \Delta_y^{y'} \partial_x^m \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; y) \right| \leq C(p(y, y'))^\lambda \times \\ & \times (B(t, \tau))^{-(M+\|m\|)/(2s)} E_c(t, \tau, x - \xi) \times \\ & \times \left(\exp\{-cB(t, \tau)(D(y))^{2s}\} + \right. \\ & \left. + \exp\{-cB(t, \tau)(D(y'))^{2s}\} \right) \times \\ & \times \left((D(y))^{2s} + (D(y'))^{2s} \right), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi, y, y'\} \subset \mathbf{R}^n, \quad m \in \mathbf{Z}_+^n. \quad (8) \end{aligned}$$

Твердження 2. *Нехай виконуються умови $\alpha_1 - \alpha_4$, а квадратна матриця порядку N $\varphi(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n$, неперервна і для неї справджуються оцінки*

$$\begin{aligned} & |\varphi(t, x; \tau, \xi)| \leq C\beta(t) \left((B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} \times \right. \\ & \times \exp\{-cB(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + \\ & \left. + (B(t, \tau))^{\lambda/(2s)} (D(\xi))^{-l} \right) E_c^d(t, \tau, x - \xi), \quad (9) \\ & |\Delta_x^{x'} \varphi(t, x; \tau, \xi)| \leq C_l(p(x, x'))^{\lambda_1} \times \\ & \times \beta(t) \left((B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda_2)/(2s)} \times \right. \\ & \times \exp\{-cB(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + \\ & \left. + (B(t, \tau))^{\lambda_2/(2s)} (D(\xi))^{-l} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(E_c^d(t, \tau, x - \xi) + E_c^d(t, \tau, x' - \xi) \right), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi, x'\} \subset \mathbf{R}^n, \\ & 0 < \lambda_1 < \lambda, \quad \lambda_2 \equiv \lambda - \lambda_1, \quad (10) \end{aligned}$$

де l – довільно фіксоване додатне число. Тоді функція

$$\begin{aligned} & u(t, x; \tau, \xi) = \\ & = \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{Z}(t, x; \theta, y; y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

має неперервні похідні, які входять у систему (7). При цьому похідні $\partial_x^k u$, $\|k\| \leq 2s - 1$, одержуються формальним диференціюванням під знаками інтегралів, а похідні старших порядків обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} & \partial_x^k u(t, x; \tau, \xi) = \\ & = \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; y) \Delta_y^x \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ & + \int_{\tau}^t \left(\int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; y) dy \right) \frac{\varphi(\theta, x; \tau, \xi)}{\alpha(\theta)} d\theta, \\ & \|k\| = 2s, \\ & \alpha(t) \partial_t u(t, x; \tau, \xi) = \varphi(t, x; \tau, \xi) + \\ & + \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} \alpha(t) \partial_t \hat{Z}(t, x; \theta, y; y) \times \\ & \times \Delta_y^x \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ & + \int_{\tau}^t \left(\int_{\mathbf{R}^n} \alpha(t) \partial_t \hat{Z}(t, x; \theta, y; y) dy \right) \times \\ & \times \frac{\varphi(\theta, x; \tau, \xi)}{\alpha(\theta)} d\theta, \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

3. Наведемо основну теорему, що стосується ф.м.р. задачі Коші для дисипативної

$\overrightarrow{2b}$ -параболічної системи з виродженням при $t = 0$.

Теорема. Нехай виконуються умови $\alpha_1 - \alpha_4$. Тоді існує ф.м.р. $Z(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n$, задачі Коші для системи (1), для якої справджуються оцінки

$$|\partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C_l \left((B(t, \tau))^{-(M+||k||)/(2s)} \times \right. \\ \left. \times \exp\{-cB(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + (D(\xi))^{-l} \right) \times \\ \times E_c^d(t, \tau, x - \xi), \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \\ ||k|| < 2s, \quad (11)$$

де l – довільно фіксоване додатне число, $C_l > 0$, $c > 0$, $d \in \mathbf{R}$.

Якщо g – функція, яка задовольняє умову α_5 , то для Z правильні також оцінки

$$|\partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leq \\ \leq C \sum_{j=0}^{||k||} (B(t, \tau))^{-(M+||k||-j)/(2s)} (D(x))^j \times \\ \times E_c^d(t, \tau, x - \xi) \exp\{g(x) - g(\xi)\}, \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \\ ||k|| < 2s, \quad (12)$$

де $C > 0$, $c > 0$, $d \in \mathbf{R}$.

Зауважимо, що у випадку слабкого виродження, тобто коли $\int_0^T \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} < \infty$, ф.м.р. визначена також при $\tau = 0$, а в оцінках (11) і (12) можна брати $\tau = 0$.

4. Ф.м.р. задачі Коші для системи (1) шукатимемо у вигляді

$$Z(t, x; \tau, \xi) = \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; \xi) + \\ + \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{Z}(t, x; \theta, y; y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad (13)$$

де $\varphi(\cdot, \cdot; \tau, \xi)$ – невідома квадратна матриця порядку N , яку підберемо так, щоб функція

$Z(\cdot, \cdot; \tau, \xi)$ була розв'язком системи (1) для будь-якої фіксованої точки $(\tau, \xi) \in \Pi_{(0, T]}$.

Припускаємо, що шукана функція φ є неперервною і для неї справджуються оцінки (9), (10).

Застосувавши диференціальний вираз L з (1) до функції (13) і використавши припущення відносно φ , одержимо на підставі твердження 2 для φ інтегральне рівняння

$$\varphi(t, x; \tau, \xi) = K(t, x; \tau, \xi) + \\ + \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad (14)$$

$$K(t, x; \tau, \xi) \equiv \\ \equiv \beta(t) \sum_{||k|| \leq 2s} \Delta_x^{\xi} a_k(t, x) \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; \xi) + \\ + \Delta_x^{\xi} b(t, x) \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; \xi). \quad (15)$$

Оцінимо ядро K , використовуючи оцінки (6), умови $\alpha_2 - \alpha_4$ та нерівності [10]

$$(p(x, \xi))^{\lambda} E_c(t, \tau, x - \xi) \leq \\ \leq C(B(t, \tau))^{\lambda/(2s)} E_{c_0}(t, \tau, x - \xi), \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad 0 < c_0 < c; \\ (B(t, \tau))^p E^d(t, \tau) \leq (\beta(t))^p (A(t, \tau))^p E^d(t, \tau) \leq \\ \leq (\beta(T))^p E^{d_0}(t, \tau), \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad p > 0, \quad d_0 > d; \\ E_c(t, \theta, x - y) E_c(\theta, \tau, y - \xi) \leq E_c(t, \tau, x - \xi), \\ 0 < \tau < \theta < t \leq T, \quad \{x, \xi, y\} \subset \mathbf{R}^n, \\ \int_{\mathbf{R}^n} E_c(t, \theta, x - y) E_c(\theta, \tau, y - \xi) \times \\ \times \left(B(t, \theta) B(\theta, \tau) \right)^{-M/(2s)} dy \leq \\ \leq C(\delta) (B(t, \tau))^{-M/(2s)} E_{c(1-\delta)}(t, \tau, x - \xi), \\ 0 < \tau < \theta < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n,$$

де δ – довільно фіксоване число з проміжку $(0, 1)$. Маємо

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C \beta(t) ((B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times E_{c_0}^{d_0}(t, \tau, x - \xi) \exp\{-cB(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} \times \\ & \times \left(\sum_{\|k\| \leq 2s} (B(t, \tau))^{(2s-\|k\|)/(2s)} \times \right. \\ & \times \left. ((D(x))^{2s-\|k\|} + (D(\xi))^{2s-\|k\|}) + 1 \right), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (16)$$

де $0 < c_0 < c$, $d_0 > d$.

Якщо $q(x, \xi) \leq 1$, то з (16) на підставі умови α_4 одержуємо

$$\begin{aligned} |K(t, x; \tau, \xi)| & \leq C_0 \beta(t) (B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} \times \\ & \times E_{c_0}^{d_0}(t, \tau, x - \xi) \exp\{-c_0 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Нехай $q(x, \xi) > 1$. Тоді за допомогою умови α_4 та нерівності Юнга маємо

$$\begin{aligned} D(x) & \leq CE_{-\epsilon/q'}(t, \tau, x - \xi) \times \\ & \times \exp\left\{\frac{M\epsilon}{2s} B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\right\} \end{aligned}$$

і, вибравши ϵ так, щоб $c_1 \equiv c_0 - \max\{2s\epsilon/q', M\epsilon\} > 0$, одержимо

$$\begin{aligned} |K(t, x; \tau, \xi)| & \leq C'_0 \beta(t) (B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} \times \\ & \times E_{c_1}^{d_1}(t, \tau, x - \xi) \exp\{-c_1 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}, \end{aligned} \quad (18)$$

де $d_1 > d_0$.

З оцінок (17) і (18) випливає оцінка

$$\begin{aligned} |K(t, x; \tau, \xi)| & \leq C_1 \beta(t) (B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} \times \\ & \times E_{c_1}^{d_1}(t, \tau, x - \xi) \exp\{-c_1 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}, \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n. \end{aligned} \quad (19)$$

На підставі цієї оцінки рівняння (14) розв'язується методом послідовних наближень, при цьому φ визначається формулою

$$\begin{aligned} \varphi(t, x; \tau, \xi) & = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, x; \tau, \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (20)$$

де $K_1 \equiv K$, а для $m \geq 2$

$$K_m(t, x; \tau, \xi) \equiv$$

$$\equiv \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} K(t, x; \theta, y) K_{m-1}(\theta, y; \tau, \xi) dy.$$

Оцінимо ядра K_m , $m \geq 2$. Маємо

$$\begin{aligned} K_2(t, x; \tau, \xi) & = \\ & = \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{A_1} K(t, x; \theta, y) K(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ & + \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{A_2} K(t, x; \theta, y) K(\theta, y; \tau, \xi) dy \equiv \\ & \equiv I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (21)$$

де $A_1 \equiv \{y \in \mathbf{R}^n \mid q(y, \xi) \leq 1\}$, $A_2 \equiv \{y \in \mathbf{R}^n \mid q(y, \xi) > 1\}$.

Використавши умову α_4 та оцінку (19), одержимо

$$\begin{aligned} |I_1| & \leq C_2(\delta) \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2s}, \frac{\lambda}{2s}\right) \beta(t) \times \\ & \times (B(t, \tau))^{-1-(M-2\lambda)/(2s)} E_{c_1(1-\delta)}^{d_1}(t, \tau, x - \xi) \times \\ & \times \exp\{-c_2 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}, \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (22)$$

де $0 < c_2 < c_1$, $C_2(\delta) > 0$, δ – довільно фіксоване число з проміжку $(0, 1)$, $\mathcal{B}$ – бета-функція Ейлера.

Для оцінки I_2 скористаємося такою оцінкою, яка випливає з (19):

$$\begin{aligned} |K(\theta, y; \tau, \xi)| & \leq \\ & \leq C_{1l} \beta(\theta) (D(\xi))^{-l} E_{c_1(1-\delta)}^{d_1}(\theta, \tau, y - \xi), \\ & 0 < \tau < \theta \leq T, \quad \{y, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad q(y, \xi) > 1, \end{aligned}$$

де l – довільно фіксоване додатне число. Маємо

$$\begin{aligned} |I_2| & \leq C_l \beta(t) \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2s}, 1\right) (D(\xi))^{-l} (B(t, \tau))^{\lambda/(2s)} \times \\ & \times E_{c_1(1-\delta)}^{d_1}(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n. \end{aligned} \quad (23)$$

З (21)–(23) випливає оцінка

$$|K_2(t, x; \tau, \xi)| \leq \left(C_2(\delta) \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2s}, \frac{\lambda}{2s}\right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times (B(t, \tau))^{-1-(M-2\lambda)/(2s)} \times \\ & \times \exp\{-c_2 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + \\ & + C_{2l} \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2s}, 1\right) (B(t, \tau))^{\lambda/(2s)} (D(\xi))^{-l} \times \\ & \times \beta(t) E_{c_1(1-\delta)}^{d_1}(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

З допомогою такої ж методики доводиться правильність оцінок

$$\begin{aligned} & |K_m(t, x; \tau, \xi)| \leq \\ & \leq \left(C_m(\delta) (B(t, \tau))^{-1-(M-m\lambda)/(2s)} \times \right. \\ & \times \exp\{-c_2 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + \\ & + C_{ml} (B(t, \tau))^{(m-1)\lambda/(2s)} (D(\xi))^{-l} \times \\ & \times \prod_{k=1}^{m-1} \mathcal{B}\left(\frac{k\lambda}{2s}, \frac{\lambda}{2s}\right) \beta(t) E_{c_1(1-(m-1)\delta)}^{d_1}(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad m \geq 2. \end{aligned}$$

Виберемо натуральне число m_0 так, щоб $(M - (m_0 - 1)\lambda + l)/(2s) + 1 \leq 0$. Тоді, взявши $\delta \equiv \delta_0(m_0 - 1)$, $c_* \equiv c_1(1 - \delta_0)$, $\delta_0 < 1/2$, одержимо

$$\begin{aligned} & |K_{m_0}(t, x; \tau, \xi)| \leq \\ & \leq C_* \beta(t) (D(\xi))^{-l} E_{c_*}^{d_*}(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (24)$$

де $d_* \geq d_1$, $C_* > 0$.

Щоб оцінити ядра K_m з $m > m_0$, спочатку за допомогою нерівностей (19) і (24) маємо

$$\begin{aligned} & |K_{m_0+1}(t, x; \tau, \xi)| \leq C_1 C_* \beta(t) (D(\xi))^{-l} \times \\ & \times \int_{\tau}^t (B(t, \theta))^{-1+\lambda/(2s)} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \times \\ & \times \int_{\mathbf{R}^n} \left(E_{c_*}^{d_*}(t, \theta, x - y) E_{c_*}^{d_*}(\theta, \tau, y - \xi) \right) \times \\ & \times E_{c_1\delta_0}(t, \theta, x - y) (B(t, \theta))^{-M/(2s)} \times \\ & \times \exp\{-c_1 B(t, \theta)(D(y))^{2s}\} dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq C_1 C_* L \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2s}, 1\right) \beta(t) (D(\xi))^{-l} \times \\ & \times (B(t, \tau))^{\lambda/(2s)} E_{c_*}^{d_*}(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

де

$$L \equiv \int_{\mathbf{R}^n} \exp\{-c_1 \delta_0 \sum_{j=1}^n |z_j|^{q_j}\} dz.$$

Далі методом математичної індукції встановлюється оцінка

$$\begin{aligned} & |K_{m_0+k}(t, x; \tau, \xi)| \leq (C_1 L)^k C_* \times \\ & \times \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2s}, 1 + \frac{j\lambda}{2s}\right) \beta(t) (D(\xi))^{-l} \times \\ & \times (B(t, \tau))^{k\lambda/(2s)} E_{c_*}^{d_*}(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

З одержаних оцінок ядер K_m випливає, що ряд (20) мажорується збіжним рядом

$$\begin{aligned} & \hat{C}_0 \beta(t) \left(\sum_{m=1}^{m_0} (B(t, \tau))^{-1-(M-m\lambda)/(2s)} \times \right. \\ & \times \exp\{-c_2 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + \\ & + \sum_{m=2}^{m_0} (B(t, \tau))^{(m-1)\lambda/(2s)} (D(\xi))^{-l} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(C_1 L \Gamma\left(\frac{\lambda}{2s}\right) (B(t, \tau))^{\lambda/(2s)} \right)^k}{\Gamma(1 + \frac{k\lambda}{2s})} (D(\xi))^{-l} \times \\ & \times E_{c_*}^{d_*}(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

де Γ – гама-функція Ейлера. Отже, ряд (19) при таких t, τ, x, ξ , що $\delta_1 < \tau < t \leq T$, $t - \tau \geq \delta_2$, $\{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n$, де δ_1, δ_2 – довільні досить малі додатні сталі, збігається абсолютно й рівномірно і для його суми φ правильна оцінка (9).

Тепер доведемо правильність оцінки (10). При $(p(x, x'))^{2s} > \frac{1}{4} B(t, \tau)$ оцінка (10) випливає з (9). Тому досить розглянути випадок, коли $(p(x, x'))^{2s} \leq \frac{1}{4} B(t, \tau)$. Спочатку оціни-

$$|\Delta_x^{x'} K(t, x; \tau, \xi)| \equiv$$

$$\begin{aligned} &\equiv \beta(t) \sum_{\|k\| \leq 2s} |\Delta_x^{x'} a_k(t, x)| |\partial_x^k \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; \xi)| + \\ &+ \beta(t) \sum_{\|k\| \leq 2s} |\Delta_x^\xi a_k(t, x')| |\Delta_x^{x'} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; \xi)| + \\ &+ |\Delta_x^{x'} b(t, x)| |\hat{Z}(t, x; \tau, \xi; \xi)| + \\ &+ |\Delta_x^\xi b(t, x')| |\Delta_x^{x'} \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; \xi)|. \end{aligned} \quad (25)$$

Скориставшись теоремою про середнє та оцінками (6), одержимо

$$\begin{aligned} |\Delta_x^{x'} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; \xi)| &\leq C(p(x, x'))^{\lambda_0} \times \\ &\times (B(t, \tau))^{-(M+\|k\|+\lambda_0)/(2s)} E_{c_0}^d(t, \tau, x - \xi) \times \\ &\times \exp\{-cB(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}, \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, x', \xi\} &\subset \mathbf{R}^n, \\ (p(x, x'))^{2s} &\leq B(t, \tau), \\ \|k\| &\leq 2s, \quad \lambda_0 \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (26)$$

Використавши припущення щодо коефіцієнтів системи (1) та оцінки (6), (25) і (26) з $\lambda_0 = \lambda$, прийдемо до нерівності

$$\begin{aligned} |\Delta_x^{x'} K(t, x; \tau, \xi)| &\equiv C\beta(t)(p(x, x'))^\lambda \times \\ &\times (B(t, \tau))^{-1-M/(2s)} E_{c_1}^{d_1}(t, \tau, x - \xi) \times \\ &\times \exp\{-c_1 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}, \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, x', \xi\} &\subset \mathbf{R}^n, \\ (p(x, x'))^{2s} &\leq B(t, \tau), \end{aligned}$$

з якої випливає, зокрема, оцінка

$$\begin{aligned} |\Delta_x^{x'} K(t, x; \tau, \xi)| &\leq C\beta(t)(p(x, x'))^{\lambda_1} \times \\ &\times (B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda_2)/(2s)} E_{c_1}^{d_1}(t, \tau, x - \xi) \times \\ &\times \exp\{-c_1 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}, \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, x', \xi\} &\subset \mathbf{R}^n, \\ (p(x, x'))^{2s} &\leq B(t, \tau). \end{aligned} \quad (27)$$

Перейдемо до оцінки $\Delta_x^{x'} \varphi$. На підставі (14) маємо

$$\begin{aligned} \Delta_x^{x'} \varphi(t, x; \tau, \xi) &= \Delta_x^{x'} K(t, x; \tau, \xi) + \\ &+ \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} \Delta_x^{x'} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{\nu}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy - \\ &- \int_{\nu}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} K(t, x'; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv \sum_{j=1}^4 J_j, \quad (28)$$

де величина ν така, що $B(t, \nu) = (p(x, x'))^{2s}$.

Для доданка J_1 маємо оцінку (27). Оскільки в інтегралі J_2 $B(t, \theta) \geq (p(x, x'))^{2s}$, то для $\Delta_x^{x'} K(t, x; \theta, y)$ можна скористатись оцінкою (27). Тоді одержимо

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq C\beta(t)(p(x, x'))^{\lambda_1} \times \\ &\times \left((B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda-\lambda_2)/(2s)} \times \right. \\ &\times \exp\{-c_2 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + \\ &\left. + (B(t, \tau))^{\lambda_2/(2s)} (D(\xi))^{-l} \right) E_{c_2}^{d_2}(t, \tau, x - \xi). \end{aligned} \quad (29)$$

Інтеграли J_3 і J_4 оцінюються однаково, при цьому використовуються оцінки (9) і (19). Для J_3 оцінка має такий вигляд:

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq C\beta(t)(p(x, x'))^\lambda \times \\ &\times \left((B(t, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} \times \right. \\ &\times \exp\{-c_2 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + \\ &\left. + (B(t, \tau))^{\lambda/2s} (D(\xi))^{-l} \right) E_{c_1}^{d_1}(t, \tau, x - \xi). \end{aligned} \quad (30)$$

З (28)–(30) випливає оцінка (10) для випадку, коли $(p(x, x'))^{2s} \leq \frac{1}{4} B(t, \tau)$.

Доведемо тепер правильність оцінки (11). Для першого доданка з (13) правильна оцінка (6). Тому оцінимо похідні від другого доданка

$$W(t, x; \tau, \xi) \equiv$$

$$\equiv \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{Z}(t, x; \theta, y; y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy,$$

$$0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n.$$

Використовуючи твердження 2, оцінки (6) і (9), як і при оцінюванні ядер K_m , $m \geq 1$, для $\|k\| < 2s$ одержимо

$$\begin{aligned} & |\partial_x^k W(t, x; \tau, \xi)| \leq \\ & \leq C \int_{\tau}^t (B(t, \theta))^{-\|k\|/(2s)} (B(\theta, \tau))^{-1+\lambda/(2s)} \times \\ & \times \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \int_{A_1} E_c^d(t, \theta, x - y) E_c^d(\theta, \tau, y - \xi) \times \\ & \times (B(t, \theta) B(\theta, \tau))^{-M/(2s)} \times \\ & \times \exp\{-c(B(t, \theta)(D(y))^{2s} + \\ & + B(\theta, \tau)(D(\xi))^{2s})\} dy + \\ & + C \int_{\tau}^t (B(t, \theta))^{-\|k\|/(2s)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times \\ & \times \int_{A_2} E_c^d(t, \theta, x - y) (B(t, \theta))^{-M/(2s)} \times \\ & \times \exp\{-cB(t, \theta)(D(y))^{2s}\} \times \\ & \times \left((B(\theta, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} E_c^d(\theta, \tau, y - \xi) \times \right. \\ & \times \exp\{-cB(\theta, \tau)(D(\xi))^{2s}\} \Big) dy + C(D(\xi))^{-l} \times \\ & \times \int_{\tau}^t (B(t, \theta))^{-M/(2s)} (B(\theta, \tau))^{\lambda/(2s)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times \\ & \times \int_{\mathbf{R}^n} E_c^d(t, \theta, x - y) E_c^d(\theta, \tau, y - \xi) \times \\ & \times (B(t, \theta))^{-M/(2s)} \times \\ & \times \exp\{-cB(t, \theta)(D(y))^{2s}\} dy \leq \\ & \leq C \left(B(t, \tau) \right)^{-(M+\|k\|-\lambda)/(2s)} \times \\ & \times \exp\{-c_1 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\} + (D(\xi))^{-l} \times \\ & \times E_{c_1}^{d_1}(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (31)$$

де $0 < c_1 < c$, $d_1 > d$, A_1 і A_2 такі ж, як в (21). Зауважимо, що при оцінюванні другого доданка використовується нерівність

$$\begin{aligned} & (B(\theta, \tau))^{-1-(M-\lambda)/(2s)} E_c^d(\theta, \tau, y - \xi) \times \\ & \times \exp\{-cB(\theta, \tau)(D(\xi))^{2s}\} \leq \\ & \leq C_l (D(\xi))^{-l} E_{c(1-\delta)}^d(\theta, \tau, y - \xi), \end{aligned}$$

$$0 < \tau < \theta \leq T, \quad \{y, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad q(y, \xi) > 1.$$

З (6), (13) і (31) випливає оцінка (11).

Якщо в оцінці (19) опустити множник $\exp\{-c_1 B(t, \tau)(D(\xi))^{2s}\}$, то оцінки ядер K_m можна проводити подібно до вищевикладеного. При цьому для Z одержаться оцінки

$$\begin{aligned} & |\partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C (B(t, \tau))^{-(M+\|k\|)/(2s)} \times \\ & \times E_c^d(t, \tau, x - \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \quad \|k\| < 2s, \end{aligned} \quad (32)$$

Для одержання оцінки (12) в рівнянні (1) зробимо заміну шуканої функції за формулою [5]

$$u(t, x) = e^{g(x)} v(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (33)$$

де g задовольняє умову α_5 . У результаті заміни (33) для функції v одержиться система

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{\|j\| \leq 2s} \sum_{\substack{k \geq j, \\ \|k\| \leq 2s}} C_k^j e^{-g(x)} a_k(t, x) \times \right. \\ & \times \partial_x^{k-j} e^{g(x)} \partial_x^j - b(t, x) \Big) v(t, x) = 0, \\ & (t, x) \in \Pi_{(0, T]}. \end{aligned} \quad (34)$$

Легко перевірити, що при виконанні умов $\alpha_1 - \alpha_3$ для системи (1) при досить малому η такі ж умови будуть виконані і для системи (34). Тому для цієї системи існує ф.м.р. $Z_1(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n$, задачі Коші, для якої правильна оцінка (32). Тоді матриця

$$\begin{aligned} & Z(t, x; \tau, \xi) \equiv \exp\{g(x) - g(\xi)\} Z_1(t, x; \tau, \xi), \\ & 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (35)$$

є ф.м.р. задачі Коші для системи (1). Якщо для матриці Z_1 використати оцінки (32), то з α_5 і (35) одержимо для Z оцінку (12).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР.— 1960.—**133**, N1.— С.40—43.
2. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$ -параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.— Киев: Ин-т математики АН УССР.— 1968.— Вып.1.— С.3—175, 271—273.
3. *Ивасишен С.Д.* Интегральные представления и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$ -параболических систем // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, N4.— С.500—506.
4. *Эйдельман С.Д.* О задаче Коши для параболических систем с растущими коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1959.— **127**, N4.— С.760—763.
5. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.
6. *Эйдельман С.Д., Порнер Ф.О.* О поведении решений параболических уравнений второго порядка с диссипацией // Дифференц. уравнения.— 1971.— **7**, N9.— С.1684—1695.
7. *Эйдельман С.Д., Порнер Ф.О.* Исследование поведения L_2 -норм решений сильно параболических систем с диссипацией // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— **37**, N3.— С.676—690.
8. *Эйдельман С.Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.63.— М.: ВИНТИ, 1990.— С.201—316.
9. *Возняк О.Г., Ивасишен С.Д.* Задача Коши для параболических систем с вырождениями на начатковій гіперплощині // Доп. АН України.— 1994.— N6.— С.7—11.
10. *Возняк О.Г., Ивасишен С.Д.* Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для параболических систем з вырождениями на початковій гіперплощині.— Чернівець. ун-т.— Чернівці, 1995.— 51 с.— Деп. в ДНТБ України 12.07.95, N1808-Ук95.
11. *Березан Л., Ивасишен С., Пасічник Г.* Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$ -параболических систем з вырождениями на початковій гіперплощині // Всеукраїнська наук. конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (15—19.09.1997, Дрогобич): Тези доп.— Київ, 1997.— С.15.
12. *Березан Л.П., Ивасишен С.Д.* Про сильно вырожденні на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$ -параболическі системи // Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". N337. Прикл. математика.— 1998.— С.73—76.
13. *Березан Л.П., Ивасишен С.Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$ -параболических систем з вырождениями на початковій гіперплощині // Доп. НАН України.— 1998.— N12.— С.7—12.
14. *Пасічник Г.С.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$ -параболических систем з вырождениями на початковій гіперплощині // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнародної наук. конф. Ч.2.— Чернівці—Київ, 1998.— С.183—186.
15. *Ивасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$ -параболических систем з вырождениями на початковій гіперплощині // Доп. НАН України.— 1999.— N6.— С.18—22.