

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ДОСЛІДЖЕННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ДИСКРЕТНИМ АРГУМЕНТОМ, ЩО НЕ ВИКОРИСТОВУЄ $\mathcal{H}$ -КЛАСИ ЦИХ РІВНЯНЬ

Отримано умови існування майже періодичних розв'язків лінійних і нелінійних майже періодичних різницьових рівнянь, що не використовують $\mathcal{H}$ -класи цих рівнянь.

We obtain conditions for the existence of almost periodic solutions of linear and nonlinear almost periodic difference equations which does not use the $\mathcal{H}$ -classes of these equations.

1. Основні позначення та задача. Нехай $\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел, $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел і E – банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через $\mathfrak{M}$ банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, де $x_n \in E$, для кожної з яких

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|_E < \infty,$$

з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|_E$$

і нульовим елементом $\mathbf{0}$.

У просторі $\mathfrak{M}$ визначимо оператор зсуву S_m , $m \in \mathbb{Z}$, формулою

$$(S_m \mathbf{x})_n = x_{n+m}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Елемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ називається *майже періодичним* (за Бохнером) (див. [1]), якщо замикання множини $\{S_m \mathbf{y} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактною підмножиною цього простору.

Множина $\mathfrak{B}$ майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є підпростором цього простору з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}.$$

Нехай Ω – область простору E і $\mathcal{K}$ – множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Визначимо відображення $\mathbf{F} : \Omega^{m+1} \rightarrow \mathfrak{M}$ формулою

$$\mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m) = (F_n(x_0, x_1, \dots, x_m))_{n \in \mathbb{Z}},$$

де $(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \Omega^{m+1}$ і $F_n : \Omega^{m+1} \rightarrow E$, $n \in \mathbb{Z}$, – неперервні відображення.

Будемо вважати, що $\mathbf{F}$ задовольняє умови:

1) $\mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m)$ як векторна функція зі значеннями в $\mathfrak{M}$ неперервна по $(x_0, x_1, \dots, x_m)$ на Ω^{m+1} і, отже, рівномірно неперервна по $(x_0, x_1, \dots, x_m)$ на кожній множині K^{m+1} , де $K \in \mathcal{K}$ (див., наприклад, [2, с. 112]);

2) $\mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m)$ – майже періодична рівномірно по $(x_0, x_1, \dots, x_m)$ на кожній множині K^{m+1} ($K \in \mathcal{K}$) послідовність.

Неважко показати, що для кожної множини $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in K^{m+1}} \|\mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m)\|_{\mathfrak{M}} < +\infty$$

(див. [2, с. 113]) і для довільної послідовності $(m_k)_{k \geq 1}$ цілих чисел існує підпослідовність $(m_{k_l})_{l \geq 1}$, для якої послідовність $\left(S_{m_{k_l}} \mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m)\right)_{l \geq 1}$ збігається рівномірно на множині K^{m+1} .

Вважатимемо, що послідовність $\left(S_{m_{k_l}} \mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m)\right)_{l \geq 1}$ збігається рівномірно на кожній множині K^{m+1} ($K \in \mathcal{K}$) і граничне відображення $\mathbf{G} : \Omega^{m+1} \rightarrow \mathfrak{M}$, що визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x_0, x_1, \dots, x_m) &= (G_n(x_0, x_1, \dots, x_m))_{n \in \mathbb{Z}}, \\ G_n(x_0, x_1, \dots, x_m) &= \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} F_{n+m_{k_l}}(x_0, x_1, \dots, x_m), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2)$$

або формулою

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x_0, x_1, \dots, x_m) = \\ = \lim_{l \rightarrow \infty} S_{m_{k_l}} \mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (3)$$

задовольняє умови 1 і 2. Наведена вимога виконується, якщо, наприклад, простір E скінченновимірний (див. аналогічні дослідження в [3, с. 429] у випадку диференціальних рівнянь). Зазначимо, що у статті ця вимога виконуватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Множина всіх визначених формулою (3) відображень $\mathbf{G}$ називається $\mathcal{H}$ -класом відображення $\mathbf{F}$ і позначається через $\mathcal{H}(\mathbf{F})$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$F_n(x_n, x_{n+k_1}, \dots, x_{n+k_m}) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

де $k_1, \dots, k_m$ – довільні цілі числа. $\mathcal{H}$ -класом цього рівняння називається множина всіх різницевих рівнянь

$$G_n(x_n, x_{n+k_1}, \dots, x_{n+k_m}) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де G_n визначається за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов існування майже періодичних розв'язків рівняння (4) без використання множини $\mathcal{H}(\mathbf{F})$. При дослідженні рівняння (4) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння (множини значень цих розв'язків – підмножини компактних множин $K \in \mathcal{K}$). Означення цього функціонала наведемо в наступному пункті.

2. Функціонал δ . Відокремлені та сильно відокремлені розв'язки рівняння (4). Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$, що містить в собі більше, ніж один елемент. Позначимо через $\mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ множину всіх розв'язків $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ рівняння (4), для кожного з яких замикання $\overline{R(\mathbf{x})}$ множини

$$R(\mathbf{x}) = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

є підмножиною множини K . Вважатимемо, що

$$\mathcal{N}(\mathbf{F}, K) \neq \emptyset.$$

Зафіксуємо довільний розв'язок $\mathbf{x}^*$ рівняння (4) зі значеннями в K . Покладемо

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}^*, K) = \\ = \sup \left\{ \|x - y\|_E : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)}, y \in K \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Завдяки вимогам до множини K

$$r(\mathbf{x}^*, K) > 0.$$

Зафіксуємо число $\varepsilon \in [0, r(\mathbf{x}^*, K)]$. Позначимо через $\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких

$$R(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) \subset K, \quad (6)$$

і

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \geq \varepsilon. \quad (7)$$

Аналогічним чином визначаємо множину $\Omega(\mathbf{z}, K, \varepsilon)$ для будь-якого іншого елемента $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$, для якого $R(\mathbf{z}) \subset K$.

Розглянемо функціонал

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{y \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|F_n(x_n^* + \\ + y_n, x_{n+k_1}^* + y_{n+k_1}, \dots, x_{n+k_m}^* + y_{n+k_m})\|_E. \end{aligned} \quad (8)$$

Означення 1. Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) називається *відокремленим* на множині $\mathbb{Z} \times K$, якщо або цей розв'язок єдиний на множині $\mathbb{Z} \times K$, або для кожного іншого розв'язку $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ зі значеннями в K виконується нерівність

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}} \|z_n - u_n\|_E \geq \rho > 0,$$

де ρ – стала, залежна тільки від $\mathbf{z}$.

Означення 2. Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) називається *сильно відокремленим* на множині $\mathbb{Z} \times K$, якщо

$$\delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$.

Очевидно, що кожний сильно відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (4) є відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язком цього рівняння. Однак відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (4) може не бути сильно відокремленим

на $\mathbb{Z} \times K$ розв'язком цього рівняння. Це підтверджується розглянутим у [4] прикладом лінійного різницевого рівняння

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

з майже періодичним коефіцієнтом

$$a_n = \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \left(\sin^2 \frac{n+1}{2(2k+1)} - \sin^2 \frac{n}{2(2k+1)} \right) \right\}.$$

У [4] показано, що нульовий розв'язок рівняння (9) є відокремленим на кожній множині $\mathbb{Z} \times [-\mu, \mu]$, $\mu > 0$, і не є сильно відокремленим на жодній із цих множин.

Застосування функціонала δ до дослідження майже періодичних різницевого рівняння (4) та аналогічного лінійного різницевого рівняння з дискретним аргументом наведемо в наступних пунктах.

Аналогічні функціонали використовувалися автором у статтях [5]–[8] та [4] для дослідження нелінійних майже періодичних рівнянь

$$f(t, x(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$F(t, x(t), x(t-\Delta_1), \dots, x(t-\Delta_m)) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$x_{n+1} = f_n(x_n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow E$, $F : \mathbb{R} \times \Omega^{m+1} \rightarrow E$ і $f_n : \Omega \rightarrow E$, $n \in \mathbb{Z}$, – неперервні відображення (тут Ω – довільна область простору E) і $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – довільні дійсні числа.

3. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (4), що на відміну від відомої теореми Америкіо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [3], [9]) не використовують $\mathcal{H}$ -клас рівняння (4) та відокремленість обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$ -класу цього рівняння.

Нехай Λ – обмежена підмножина простору E . Визначимо діаметр $\text{diam } \Lambda$ множини Λ рівністю

$$\text{diam } \Lambda = \sup \{ \|x - y\|_E : x, y \in \Lambda \}.$$

Теорема 1. Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) $\text{diam } R(\mathbf{z}) \neq 0$ і виконується співвідношення

$$\delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) > 0 \quad (10)$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауваження 1. Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4), для якого $\text{diam } R(\mathbf{z}) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

Доведення теореми 1. Припустимо, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) не є елементом простору $\mathfrak{B}$. Тоді існує така послідовність $(S_{m_p} \mathbf{z})_{p \geq 1}$, що кожна підпослідовність $(S_{k_p} \mathbf{z})_{p \geq 1}$ буде розбіжною. Отже,

$$\|S_{k_{p_r}} \mathbf{z} - S_{k_{q_r}} \mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} \geq \gamma, \quad r \geq 1, \quad (11)$$

для деяких чисел $\gamma \in (0, \text{diam } R(\mathbf{z}))$ і послідовностей $(p_r)_{r \geq 1}$, $(q_r)_{r \geq 1}$ натуральних чисел.

Зазначимо, що

$$\text{diam } R(\mathbf{z}) \leq r(\mathbf{z}, K).$$

Не обмежуючи загальності можна вважати, що послідовність $(S_{k_p} \mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m))_{p \geq 1}$ збігається рівномірно на K^{m+1} . Тоді

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sup_{x_0, x_1, \dots, x_m \in K} \|S_{k_p} \mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m) - S_{k_q} \mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_m)\|_{\mathfrak{M}} = 0. \quad (12)$$

Розглянемо елементи

$$\mathbf{y}_r = S_{k_{p_r}} \mathbf{z} - S_{k_{q_r}} \mathbf{z}, \quad r \geq 1,$$

простору $\mathfrak{M}$. Очевидно, що

$$\mathbf{y}_r \in \Omega(S_{k_{q_r}} \mathbf{z}, K, \gamma), \quad r \geq 1. \quad (13)$$

Покажемо, що

$$\delta(\mathbf{z}, K, \gamma) = 0. \quad (14)$$

Завдяки (8), (13) та того, що

$$F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \dots, z_{n+k_{p_r}+k_m}) \equiv 0$$

для кожного $r \geq 1$, виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{z}, K, \gamma) &= \\ &= \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{z}, K, \gamma)} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|F_n(z_n + y_n, \\ &\quad z_{n+k_1} + y_{n+k_1}, \dots, z_{n+k_m} + y_{n+k_m})\|_E = \\ &= \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(S_{k_{q_r}}, \mathbf{z}, K, \gamma)} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{q_r}} + y_n, \\ &\quad z_{n+k_{q_r}+k_1} + y_{n+k_1}, \dots, z_{n+k_{q_r}+k_m} + y_{n+k_m})\|_E \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{q_r}} + (z_{n+k_{p_r}} - z_{n+k_{q_r}}), \\ &\quad z_{n+k_{q_r}+k_1} + (z_{n+k_{p_r}+k_1} - z_{n+k_{q_r}+k_1}), \dots, \\ &\quad z_{n+k_{q_r}+k_m} + (z_{n+k_{p_r}+k_m} - z_{n+k_{q_r}+k_m}))\|_E = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \dots, \\ &\quad z_{n+k_{p_r}+k_m})\|_E \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}, \\ &\quad z_{n+k_{p_r}+k_1}, \dots, z_{n+k_{p_r}+k_m})\|_E + \\ &+ \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \dots, \\ &\quad z_{n+k_{p_r}+k_m}) - F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \dots, \\ &\quad z_{n+k_{p_r}+k_m})\|_E = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|F_{n+k_{p_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \dots, \\ &\quad z_{n+k_{p_r}+k_m}) - F_{n+k_{q_r}}(z_{n+k_{p_r}}, z_{n+k_{p_r}+k_1}, \dots, \\ &\quad z_{n+k_{p_r}+k_m})\|_E, \end{aligned}$$

з яких на підставі (12) випливає співвідношення (14), що суперечить (10).

Таким чином, припущення, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що виконання в теоремі 1 співвідношення (10) означає, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) є сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$. Тому формулювання цієї теореми можна подати в наступному вигляді.

Теорема 2. Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (4) сильно

відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауваження 2. Якщо розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (4) не є сильно відокремленим на множині $\mathbb{Z} \times K$, то цей розв'язок може бути майже періодичним, так і не бути майже періодичним (див. відповідні приклади в [4]).

4. Випадок лінійного рівняння (4). Розглянемо майже періодичні послідовності $(A_{k,n})_{n \in \mathbb{Z}}$, $k = \overline{0, m}$, лінійних неперервних операторів, що діють у просторі E , майже періодичний елемент $\mathbf{h} = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, довільні цілі числа $k_1, \dots, k_m$ та відповідне лінійне різницеве рівняння

$$A_{0,n}x_n + \sum_{l=1}^m A_{k_l,n}x_{n+k_l} = h_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Оскільки це рівняння – окремий випадок рівняння (4), то на підставі теореми 2 справджується наступне твердження.

Теорема 3. Нехай $K \in \mathcal{K}$. Сильно відокремлений на множині $\mathbb{Z} \times K$ розв'язок $\mathbf{z} = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ рівняння (15), для якого $R(\mathbf{z}) \neq K$, є майже періодичним.

Зазначимо, що в рівнянні (15) оператори $A_{k,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{0, m}$, можуть не мати обернених неперервних операторів. Прикладом такого рівняння є наступне різницеве рівняння

$$\sum_{l=1}^m P_l A_l x_{n+k_l} = h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (16)$$

де A_k , $k = \overline{1, m}$ – лінійні неперервні оператори, що мають неперервні обернені оператори, і P_k , $k = \overline{1, m}$ – лінійні неперервні оператори, для яких

$$P_k P_l = P_l P_k = \delta_{kl} P_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, m},$$

(δ_{kl} – символ Кронекера),

$$\sum_{k=1}^m P_k = I$$

$$P_k A_l = A_l P_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, m}.$$

Легко перевірити, що розв'язок рівняння (16) подається у вигляді

$$x_n = \sum_{l=1}^m A_l^{-1} P_l h_{n-k_l}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На завершення зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків рівнянь (4) і (15) є новими, оскільки на відміну від відомих теорем Амеріо [9] і Фавара [10] про майже періодичні розв'язки диференціальних рівнянь в теоремах 1, 2 і 3 не використовуються $\mathcal{H}$ -класи рівнянь (4) і (15) та умова відокремлення обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$ -класів цих рівнянь і банаховий простір E може бути нескінченновимірним.

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницьових рівнянь (вимога існування таких розв'язків у теоремах 1 і 2 є суттєвою) отримано в [11]–[15].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. Слюсарчук В.Ю. Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницьових рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 3. – С. 416–425.
5. Слюсарчук В.Ю. Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$ -класи цих рівнянь // Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, № 1–2. – С. 136–138.
6. Слюсарчук В.Ю. Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницьових рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 1. – С. 118–124.
7. Слюсарчук В.Ю. Дослідження майже періодичних різницьових рівнянь з неперервним аргументом, що не використовує $\mathcal{H}$ -класи цих рівнянь // Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, № 3–4. – С. 139–145.
8. Слюсарчук В.Ю. Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних

рівнянь у банаховому просторі // Український математичний журнал. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307–312.

9. Amerio L. Soluzioni quasiperiodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.

10. Favard J. Sur les équations différentielles à coefficients presque-périodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31–81.

11. Слюсарчук В.Ю. Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницьових рівнянь // Науковий вісник Чернівецького університету, Математика. – 2009. – Випуск 454. – С. 88–94.

12. Слюсарчук В.Ю. Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницьових рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 368–378.

13. Слюсарчук В.Ю. Експоненціально дихотомічні різницьові рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 536–555.

14. Слюсарчук В.Ю. Метод локального лінійного наближення нелінійних різницьових операторів слабо регулярними операторами // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 122–126.

15. Слюсарчук В.Ю. Нелінійні різницьові рівняння у просторах обмежених двосторонніх послідовностей // Нелінійні коливання – 2012. – **15**, № 4. – С. 528–538.