

©2014 р. В.В. Городецький, О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ТА ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРАМИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА

Встановлена розв'язність задачі Коші та двоточкової задачі для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання у просторах типу S та S' .

We prove the solvability of the Cauchy and the two-point problems for evolution equations with generalized differential operators in spaces of S and S' -type.

У теорії аналітичних у крузі функцій вивчається питання про зображення лінійних неперервних відображень у вигляді операторів узагальненого диференціювання та інтегрування скінченного та нескінченного порядків. Цими питаннями займалися Ж. Дельсарт, Ж.-Л. Ліонс, Ю.Ф. Коробейник, М.І. Нагнибіда, В.В. Напалков, В.П. Подпорін, С.С. Лінчук, В.А. Ткаченко, І.І. Райчинов, М.Ю.Царьков та інші математики.

Важливий клас операторів узагальненого диференціювання утворюють оператори Гельфонда-Леонтьєва [1], введені в середині ХХ сторіччя при вивченні розкладів цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є. Ці оператори позначаються такими символами $D^n(F, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$. Властивості таких операторів досліджували і продовжують досліджувати математики в просторі A_∞ однозначних і цілих в $\mathbb{C}$ функцій з топологією компактної збіжності (A_∞ не є нормованим простором, але в той же час A_∞ – простір Фреше). Прикладами інших просторів, елементами яких є цілі функції і які використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими (або залежними лише від t) коефіцієнтами, є простори S_α^β , $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, введені в [2].

Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \rightarrow \infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Топологія просторів S_α^β відрізняється

від топології простору A_∞ .

Якщо $F(z) = e^z$, $n = 1$, то $D^1(e^z, \cdot)$ збігається із звичайним оператором диференціювання. У працях Горбачука М.Л., Горбачук В.І. [3], Городецького В.В. [4] та інших математиків встановлено, що простори S_α^β та $(S_\alpha^\beta)'$ – простори, топологічно спряжені з ними, – є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними.

У зв'язку з цим актуальним є питання про дослідження задачі Коші та багатоточкових за часом задач у просторах, які є узагальненнями просторів S_α^β , а також просторах, топологічно спряжених з ними, для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва як скінченного, так і нескінченного порядків у випадку, коли $F(z) \neq e^z$.

1. Простори $S_{l_k}^{m_n}$ та $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. При дослідженні задачі Коші та нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних рівнянь з оператором узагальненого диференціювання виникають простори, що є узагальненнями просторів типу S , а саме простори $S_{l_k}^{m_n}$. Ці простори також введені Гельфондом Г.Є. і Шиловим І.М., але вони на відміну від просторів S_α^β майже не досліджені. Найбільш детально вивчено випадок, коли $m_n = n^{n\beta}$, $l_k = k^{k\alpha}$, $\beta > 0$,

$\alpha > 0$, $\{n, k\} \subset \mathbb{Z}$. Тому передусім варто зупинитися на тих обмеженнях, які ми накладаємо на послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, на топологічній структурі відповідних просторів $S_{l_k}^{m_n}$ та на основних властивостях функцій з цих просторів.

Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка має такі властивості:

- 1) $\forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_n \leq m_{n+1}, m_0 = 1$;
- 2) $\forall \alpha > 0 \exists c_\alpha > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;
- 3) $\exists M > 0 \exists h > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_{n+1} \leq Mh^n m_n$;
- 4) $\exists \gamma > 0 \forall n \in \mathbb{N} : m_n^2 \leq \gamma m_{n-1} \cdot m_{n+1}$;
- 5) $\exists A > 0 \exists L > 0 \forall \{n, l\} \subset \mathbb{Z}_+ : m_n \cdot m_l \leq AL^{n+l} m_{n+l}$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_n = (n!)^\beta$, $m_n = n^{n\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\beta > 0$ – фіксований параметр [3].

Разом з ними розглянемо ще одну послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, яка також має властивості 1) – 5).

Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову:

$$\exists c > 0 \exists A > 0 \exists B > 0 \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n l_k m_n \quad (1)$$

(сталі $c, A, B > 0$ залежать від функції φ).

Топологічна структура в $S_{l_k}^{m_n}$ визначається так. Символом $S_{l_k, A}^{m_n, B}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$, таких, що

$$\forall \bar{A} > A \forall \bar{B} > B \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c \bar{A}^k \bar{B}^n l_k m_n, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Інакше, $S_{l_k, A}^{m_n, B}$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$, які при довільних $\delta > 0$, $\rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_\delta \rho (A + \delta)^k (B + \rho)^n l_k m_n, \\ \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x, k, n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n l_k m_n},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}. \quad (2)$$

Якщо $A_1 < A$, $B_1 < B_2$, то $S_{l_k, A_1}^{m_n, B_1}$ неперервно вкладається в $S_{l_k, A_2}^{m_n, B_2}$ і

$$S_{l_k}^{m_n} = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} \text{ind } S_{l_k, A}^{m_n, B}.$$

Збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ до нуля в просторі $S_{l_k}^{m_n}$ – це збіжність за топологією одного з просторів $S_{l_k, A}^{m_n, B}$, до якого належать всі функції φ_ν . Іншими словами, $\varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ у просторі $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли функціональна послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, n \geq 1\}$ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$ рівномірно збігається до нуля на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і для деяких $c, A, B > 0$, не залежних від ν , справджуються нерівності

$$|x^k \varphi_\nu^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n l_k m_n, x \in \mathbb{R}, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

У введених просторах визначені й обмежені (а отже, і неперервні) [2] лінійні оператори множення на x , на всі многочлени, на нескінченно диференційовні функції, які задовольняють певні умови (зокрема, на функції із вказаних просторів), оператори диференціювання, зсуву аргументу та розтягу.

Розглянемо послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ спеціального вигляду, а саме, $m_n = n! \rho_n$, $l_k = k! d_k$, де $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\rho_0 = 1$, – послідовність додатних чисел, яка задовольняє умови: а) послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадає; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Послідовність $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ має, за припущенням, властивості, аналогічні властивостям а), б). Зазначимо, що послідовності $\{n! \rho_n\}$, $\{k! d_k\}$ задовольняють умови 1) – 5) [5].

Покладемо

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} (k! d_k / |x|^k), & |x| \geq 1; \end{cases}$$

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (|y|^n / (n! \rho_n)), & |y| \geq 1. \end{cases}$$

Зазначимо, що ρ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно

зростає на проміжку $[1, +\infty)$,

$$\exists c_0 > 0 \exists c > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) : \rho(x) \geq c_0 e^{c|x|}.$$

Функція γ – невід’ємна, неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$, крім того

$$\exists c'_0 > 0 \exists c' > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) :$$

$$\gamma(x) \leq c'_0 e^{-c'|x|}.$$

Наприклад, якщо $l_k = k^{k(1-\alpha)} = k^k d_k$, $d_k = k^{-k\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то γ задовольняє нерівність [1]:

$$\exp \left\{ -\frac{(1-\alpha)}{e} |x|^{1/(1-\alpha)} \right\} \leq \gamma(x) \leq \\ \leq C \exp \left\{ -\frac{(1-\alpha)}{e} |x|^{1/(1-\alpha)} \right\}, C = e^{(1-\alpha)e/2}.$$

Правильним є наступне твердження [5]:

Теорема 1. Функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\exists a, b, b > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by).$$

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій φ з простору $S_{l_k}^{m_n}$ в $\mathbb{C}$, позначимо символом $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Із теореми 1 випливає, що простір $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ можна подати як об’єднання зліченно нормованих просторів $S_{l_k, a}^{m_n, b}(\mathbb{C})$ за всіма індексами $a \in \left\{ \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$, $b \in \mathbb{N}$, де $S_{l_k, a}^{m_n, b}(\mathbb{C})$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, для яких справджується нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c\gamma(\bar{a}x)\rho(\bar{b}y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\bar{a}$ – довільна додатна стала, менша за a , $\bar{b}$ – довільна стала, більша за b . Якщо для $\varphi \in S_{l_k, a}^{m_n, b}(\mathbb{C})$ покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\gamma\left(a\left(1 - \frac{1}{p}\right)x\right)\rho((b + \omega)y)},$$

$$p \in \{2, 3, \dots\}, \quad \omega \in \mathbb{N},$$

то ці норми, внаслідок теореми 1, еквівалентні нормам (2). Отже, послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x), \nu \geq 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому мають місце нерівності

$$|\varphi_\nu(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від ν .

Мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}$ є функція $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : |f(z)| \leq c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

2. Простір узагальнених функцій $(S_{l_k}^{m_n})'$

Символом $(S_{l_k}^{m_n})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$ визначається формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Кожна локально інтегровна на $\mathbb{R}$ функція f , яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|f(x)| \leq c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \quad (3)$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (S_{l_k}^{m_n})'$:

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in S_{l_k}^{m_n}$$

(тут γ – функція, пов’язана з простором $S_{l_k}^{m_n}$).

Правильним є наступне твердження: якщо локально інтегровні на $\mathbb{R}$ функції f, g , які задовольняють умову (3), не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in S_{l_k}^{m_n}$ така, що $\langle f, \varphi_0 \rangle \neq \langle g, \varphi_0 \rangle$, тобто $F_f \neq F_g$. Навпаки, якщо $F_f \neq F_g$, то функції f, g не збігаються на множині додатної міри Лебега.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми з [6].

Сформульоване твердження дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, що задовольняють умову (3), з породжуваними ними узагальненими функціями F_f з простору $(S_{l_k}^{m_n})'$. Із властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення

$$S_{l_k}^{m_n} \ni f \rightarrow F_f \in (S_{l_k}^{m_n})'$$

є неперервним.

Якщо $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ (тобто елементи простору $(S_{l_k}^{m_n})'$ є нескінченно диференційовними), зсув $f(ay + b)$, $a \neq 0$, добуток αf , де α – мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі $S_{l_k}^{m_n}$ визначена операція зсуву аргументу $T_x: \varphi(\xi) \rightarrow \varphi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$ з основною задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{-x}\varphi(\xi) \rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на φ як функцію аргументу ξ , $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$).

Із загальної теорії досконалих просторів з неперервними операціями зсуву та диференціювання випливає (див. [2]), що граничне співвідношення

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \rightarrow \varphi'(x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

для кожної основної функції φ виконується в сенсі збіжності в просторі $S_{l_k}^{m_n}$. Отже, $(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle$ є не лише неперервною, але й нескінченно диференційовною функцією [2].

3. Оператори узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонт'єва у просторах типу S

Важливий клас операторів узагальненого диференціювання утворюють оператори Гельфонда-Леонт'єва, введені в середині 20 сторіччя при вивченні розкладів цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є. Властивості таких операторів досліджували і продовжують досліджувати у даний час багато математиків у просторі A_R , $0 < R \leq \infty$. Нагадаємо, що символом A_R позначається лінійний простір всіх однозначних і аналітичних у крузі $K_R = \{z : |z| < R\}$ функцій. З курсу теорії функцій комплексної змінної відомо, що будь-яку функцію $F(z)$ з A_R можна єдиним способом розвинути в степеневий ряд

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (4)$$

який збігається рівномірно на кожній компактній підмножині точок круга K_R ; при цьому коефіцієнти a_k задовольняють умову

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{R}. \quad (5)$$

Навпаки, якщо послідовність комплексних чисел $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову (5) і R_1 – радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то, як випливає з відомої формули Коші-Адамара, $R_1 \geq R$. Отже, формула (4) визначає функцію з простору A_R . Таким чином, простір A_R складається з тих й лише тих функцій $F(z)$, які зображаються у вигляді (4), а відповідні їм послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняють умову (5).

Топологія цього простору задається системою норм $\{\|\cdot\|_r, 0 < r < R\}$, де $\|F\|_r = \max_{|z| \leq r} |F(z)|$, а послідовність $\{g_m(z), m \geq 1\}$ функцій з A_R збігається до функції $g(z) \in A_R$ тоді й лише тоді, коли

$$\forall r < R : \lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m - g\|_r = 0. \quad (6)$$

Оскільки умова (6) рівносильна, очевидно, тому, що послідовність функцій $\{g_m(z), m \geq 1\}$ збігається до $g(z)$ на кожній компактній

підмножині круга K_R рівномірно, то так введено в A_R топологію називають ще топологією компактної збіжності. Простір A_R із введеною топологією не є нормованим, але в той же час A_R – метризований повний локально опуклий простір, тобто простір Фреше [7].

Оператором Гельфонда-Леонтьєва називається оператор, побудований за допомогою послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (k^{1/\rho} |a_k|^{1/k}) = (\sigma e \rho)^{1/\rho}, \quad 0 < \sigma, \rho < +\infty, \quad (7)$$

тобто $a_k, k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Тейлора деякої спеціальної цілої функції F порядку ρ і типу σ . Такий оператор позначається символом $D^n(F, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, і визначається так.

Нехай $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – довільна функція з простору A_R ($0 < R \leq \infty$); тоді, за означенням [1],

$$D^n(F, \varphi)(z) := \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}. \quad (8)$$

Внаслідок умови (7) існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-n} \sqrt[n]{\left| \frac{a_{k-n}}{a_k} \right|} = 1$, тому ряд (8) збігається в крузі $|z| < R$, тобто функція $D^n(F, \varphi)$ регулярна в тому ж крузі, що і функція φ . Відзначимо відомі властивості оператора $D^n(F, \varphi) \equiv D^n \varphi$ [1]:

- 1) $D^n(\varphi_1 + \varphi_2) = D^n \varphi_1 + D^n \varphi_2$;
- 2) якщо c – стала, то $D^n(c\varphi) = cD^n \varphi$;
- 3) $D^m(D^n \varphi) = D^{m+n} \varphi$;
- 4) якщо $F(z) = e^z$, то $D^n \varphi = D^n(e^z, \varphi) = \frac{d^n}{dz^n} \varphi$.

Ці властивості показують, що $D^n(F, \varphi)$ справді можна розуміти як узагальнену похідну порядку n від функції φ , яка породжена функцією $F(z)$ (замість функції e^z). Якщо $n = 1$, то $D^1(F, \cdot)$ – оператор узагальненого диференціювання, який діє в просторі A_R і будується за послідовністю $\alpha = \{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ так: на елементах степеневого базису $\{z^k, k \in \mathbb{Z}_+\}$

$$D_\alpha 1 = 0, D_\alpha z^k = \frac{a_{k-1}}{a_k} z^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Оператор D звичайного диференціювання в A_R є частковим випадком D_α при $a_k = \frac{1}{k!}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Дослідимо властивості оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу S . Надалі вважатимемо, що послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ коефіцієнтів Тейлора функції F , за якою будуються оператори $D^n(F, \cdot)$, замість умови

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-n} \sqrt[n]{\left| \frac{a_{k-n}}{a_k} \right|} = 1 \text{ задовольняє умову:}$$

$$\exists \alpha > 0 \exists L > 1 \forall k \geq n :$$

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+n}} \right| \leq \alpha L^{k+n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ – фіксоване}). \quad (9)$$

Оператори узагальненого диференціювання розглядатимемо в просторах $S_{m_k}^{m_n}$. Як випливає з теореми 1, функція φ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли виконується умова:

$$\exists a > 0 \exists b > 0 \exists c > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq c \gamma(ax) \rho(by), \quad \gamma = 1/\rho. \quad (10)$$

Правильним є наступне твердження.

Теорема 2. Оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва $D^m(F, \cdot)$ визначений коректно на $S_{m_k}^{m_n}$ для довільно фіксованого $m \in \mathbb{N}$ і неперервно відображає цей простір в себе.

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$, яка допускає аналітичне продовження в комплексну площину, і нехай $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k z^k$ – її степеневий ряд. Покладемо, за означенням,

$$\begin{aligned} \psi_m(z) &\equiv D^m(F, \varphi)(z) := \sum_{k=m}^{\infty} \tilde{b}_k \frac{a_{k-m}}{a_k} z^{k-m} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_{k+m} \frac{a_k}{a_{k+m}} z^k, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Доведемо, що $\psi_m(x) \in S_{m_k}^{m_n}$ при кожному $m \in \mathbb{N}$. Для цього згідно з теоремою 1 досить довести, що $\psi_m(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Передусім зазначимо, що ψ_m також є цілою функцією. Справді, з умови (9) випливає, що

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{a_k}{a_{k+m}} \right|} < \infty$. Отже, радіуси збіжності вказаних степеневих рядів збігаються:

$$\frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\tilde{b}_{k+m}| \cdot \left| \frac{a_k}{a_{k+m}} \right|}} = \infty.$$

Функція φ ціла, тому візьмемо довільно фіксовану точку $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$, і подамо φ у вигляді збіжного в $\mathbb{C}$ ряду:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \text{ або}$$

$$\varphi(z + z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (11)$$

при цьому коефіцієнти b_k , $k \in \mathbb{Z}$, функції φ обчислюються за формулою Коші:

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці z_0 . З урахуванням (10) та властивостей функцій γ , ρ знайдемо, що

$$|b_k| \leq R^{-k} \max_{\xi \in \Gamma_R} |\varphi(\xi)| \leq c R^{-k} \gamma(a\tilde{x}_0) \rho(b(y_0 + R)),$$

де $\tilde{x}_0$ – точка максимуму функції $\gamma(ax)$, $\tilde{x}_0 \in [x_0 - R, x_0 + R]$.

При доведенні теореми 1 встановлено, що $\gamma(a\tilde{x}_0) \leq \tilde{c} \gamma(ax_0)$, де $\tilde{c} = \max\{c, 1, c_{a,R}\}$. Крім того, оскільки функція ρ монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, то для $y_0 \geq b$ справджується нерівність $b(y_0 + R) \leq (b + R)y_0$. Отже, $\rho(b(y_0 + R)) \leq \rho((b + R)y_0)$, $y_0 \geq b$. Тоді для $y_0 > 0$ справджується нерівність

$$\rho(b(y_0 + R)) \leq c_R \rho((b + R)y_0), \quad c_R > 1.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} |b_k| &\leq \tilde{c} R^{-k} \gamma(ax_0) \rho((b + R)y_0) = \\ &= \tilde{c} \frac{((b + R)y_0)^k}{R^k} \inf_{\eta > 0} \frac{\rho(\eta)}{\eta^k} \gamma(ax_0) \leq \\ &\leq \tilde{c} \left(1 + \frac{b}{R}\right)^k y_0^k \rho_k \gamma(ax_0), \quad \tilde{c} = c c_R. \end{aligned}$$

Аналогічно розглядається випадок $y_0 < 0$. Якщо $y_0 = 0$ (тобто $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$), то для

коефіцієнтів b_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} |b_k| &\leq R^{-k} \max_{\xi \in \Gamma_R} |\varphi(\xi)| \leq c R^{-k} \rho(bR) \gamma(ax_0) \leq \\ &\leq c \inf_R \frac{\rho(R)}{R^k} \gamma(ax_0) = c b^k \inf_R \frac{\rho(bR)}{(bR)^k} \gamma(ax_0) = \\ &= c b^k \inf_{\eta > 0} \frac{\rho(\eta)}{\eta^k} \gamma(ax_0) = c b^k \rho_k \gamma(ax_0). \end{aligned}$$

Отже, для коефіцієнтів Тейлора b_k , $k \in \mathbb{Z}$, функції φ правильні оцінки:

$$\begin{aligned} |b_k| &\leq \tilde{c} b^k |y_0|^k \rho_k \gamma(ax_0) = \\ &= \tilde{c} \beta^k |y_0|^k \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^k \rho(\nu_k) \gamma(ax_0), \\ &x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, \end{aligned}$$

де $\beta = 1 + \frac{b}{R}$ (якщо покласти $R = b$, то $\beta = 2$), $\rho_k = \nu_k^{-k} \rho(\nu_k)$, ν_k – розв'язок рівняння $\xi \mu(\xi) = k$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu(\xi) = \rho'(\xi)/\rho(\xi)$; за умови $\mu(2) > 1$ маємо $\nu_k < k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Оцінимо $\rho(\nu_k)$. Оскільки $\rho(\nu_k) = \exp\left(\int_0^{\nu_k} \mu(\xi) d\xi\right)$, то, внаслідок теореми про середнє значення,

$$\forall k \geq 1 \exists y_k \in (0, \nu_k) : \rho(\nu_k) = \exp(\nu_k \mu(y_k)).$$

Функція μ зростаюча і неперервна на $[0, \infty)$, тому $\rho(\nu_k) < \exp(\nu_k \mu(\nu_k)) = e^{k+1}$. Отже,

$$|b_k| \leq \tilde{c}_1 (\beta e)^k |y_0|^k \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^k \gamma(ax_0), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (12)$$

У співвідношенні (11) покладемо $z = z_0$; в

результаті дістанемо, що $\varphi(2z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z_0^k$.

Оскільки $z_0 \in \mathbb{C}$ – довільне, то маємо розклад $\varphi(2z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. З іншого боку,

$$\varphi(2z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \tilde{b}_k z^k. \text{ Отже, } \tilde{b}_k = 2^{-k} b_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Далі здійснимо поточкову оцінку $\psi_m(z)$ при довільно фіксованому $m \in \mathbb{N}$. Урававши умову (9), яку задовольняє послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, а також (12), прийдемо

до нерівності

$$|\psi_m(z)| \leq \tilde{c}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta e L}{2}\right)^{k+m} \left(\frac{1}{\nu_{k+m}}\right)^{k+m} \times \\ \times |y|^{k+m} |z|^k \gamma(ax), \quad z = x + iy \in C. \quad (13)$$

Оскільки $\nu_{k+m} \geq \nu_k$, $\nu_{k+m} \geq \nu_m$, то

$$\left(\frac{1}{\nu_{k+m}}\right)^{k+m} \leq \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^k \left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m.$$

Припустимо, що $|x| \geq \Delta_1$, $|y| \geq \Delta_2$, де $\Delta_1 > 1$, $\Delta_2 > 1$ такі, що $\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \leq 1$. Тоді

$$\frac{1}{|x|^k} + \frac{1}{|y|^k} \leq \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \leq \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \leq 1, k \in \mathbb{N},$$

тобто $|x|^k + |y|^k \leq |x|^k |y|^k$. Врахувавши останню нерівність, знайдемо, що

$$|y|^{k+m} |z|^k \leq (\sqrt{2})^k |y|^{k+m} (|x|^k + |y|^k) \leq \\ \leq (\sqrt{2})^k |y|^{k+m} |x|^k |y|^k = \\ = (\sqrt{2})^k |x|^k |y|^{2k+m} \leq (\sqrt{2})^k |x|^k |y|^{2(k+m)}.$$

Крім того,

$$m_{2(k+m)} = (2(k+m))! \rho_{2(k+m)} \leq \\ \leq 2^{k+m} (k+m)! \rho_{k+m}^2 = 2^{k+m} (k+m)! \times \\ \times \left(\frac{1}{\nu_{k+m}^2}\right)^{k+m} \rho^2(\nu_{k+m}) \leq 2^{k+m} e^{2(k+m)} (k+m)! \times \\ \times \left(\frac{1}{\nu_{k+m}^2}\right)^{k+m} = (2e^2)^{k+m} (k+m)^{k+m} \times \\ \times \sqrt{2\pi(k+m)} e^{-(k+m)} e^{\theta/12(k+m)} \left(\frac{1}{\nu_{k+m}^2}\right)^{k+m} \leq \\ \leq \sqrt{2\pi} e (4e)^{k+m} \left(\frac{k+m}{\nu_{k+m}^2}\right)^{k+m}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Нехай послідовність $\{p/\nu_p^2, p \in \mathbb{N}\}$ монотонно прямує до нуля при $p \rightarrow \infty$, тоді

$$\left(\frac{k+m}{\nu_{k+m}^2}\right)^{k+m} \leq \left(\frac{k+1}{\nu_{k+1}^2}\right)^{k+1} \leq \\ \leq \frac{k+1}{\nu_k^2} \left(\frac{k+1}{\nu_{k+1}^2}\right)^k \leq \frac{2^k}{\nu_k^2} \frac{\sum_{l=0}^k C_k^l k^l}{\nu_k^{2k}} \leq$$

$$\leq \frac{2^k 2^k \cdot k^k}{\nu_k^2 \nu_k^{2k}} \leq \frac{4^k}{\nu_1^2} \left(\frac{k}{\nu_k^2}\right)^k, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

$$|y|^{2(k+m)} = \frac{|y|^{2(k+m)}}{m_{2(k+m)}} \cdot m_{2(k+m)}. \quad (15)$$

Врахувавши (13), (14), (15), прийдемо до ланцюжка нерівностей:

$$|\psi_m(z)| \leq \tilde{c}_1 (2\beta e^2 L)^m \left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} (2\sqrt{2}\beta e^2 L)^k \times \\ \times \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^{3k} k^k |x|^k \frac{|y|^{2(k+m)}}{m_{2(k+m)}} \gamma(ax) \leq \omega_0 \tilde{c}_1 (2\beta e^2 L)^m \times \\ \times \left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^{3k} k^k \times \\ \times \left(\sup \frac{(B|y|)^{2(k+m)}}{m_{2(k+m)}}\right) |x|^k \gamma(ax) = \\ = \omega_n B_1^m \left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m \rho(By) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^{3k} k^k |x|^k \gamma(ax),$$

де $B = \sqrt{2\sqrt{2}L\beta e}$, $B_1 = 2\beta e^2 L$. Далі скористаємося співвідношеннями $\gamma = 1/\rho = e^{\ln \gamma} = e^{-\ln \rho}$. Із нерівності [5]

$$\rho(y_1)\rho(y_2) \leq \rho(y_1 + y_2), \quad \forall \{y_1, y_2\} \subset (0; \infty), \quad (16)$$

випливає, що функція $\ln \rho$ задовольняє наступну нерівність (нерівність опуклості):

$$\ln \rho(y_1) + \ln \rho(y_2) \leq \ln \rho(y_1 + y_2), \\ \forall \{y_1, y_2\} \subset [0, \infty).$$

Тоді

$$\gamma(ax) = e^{-\ln \rho(ax)} \leq e^{-\ln \rho(\frac{a}{2}x)} e^{-\ln \rho(\frac{a}{2}x)} = \\ = \gamma\left(\frac{a}{2}x\right) \gamma\left(\frac{a}{2}x\right), \quad x \geq 0.$$

За допомогою методів диференціального числення знаходимо, що

$$\sup_{x \geq 0} x^k \gamma\left(\frac{a}{2}x\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^k \sup_{x \geq 0} \left(\frac{a}{2}x\right)^k \gamma\left(\frac{a}{2}x\right) = \\ = \left(\frac{2}{a}\right)^k \sup_{y \geq 0} (y^k \gamma(y)) = \left(\frac{2}{a}\right)^k \nu_k^k \gamma(\nu_k) \leq \\ \leq \left(\frac{2}{a}\right)^k \nu_k^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (17)$$

(тут $\gamma(\nu_k) \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$). З (17) випливає нерівність

$$\left(\frac{1}{\nu_k}\right)^{3k} k^k |x|^k \gamma(ax) \leq \left(\frac{2}{a}\right)^k \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^{2k} k^k \gamma\left(\frac{a}{2}x\right).$$

Звідси, за допомогою ознаки Коші збіжності знакододаданих рядів, робимо висновок про збіжність ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^{3k} k^k \sup_{x \geq 0} x^k \gamma\left(\frac{a}{2}x\right).$$

Отже, функція ψ_m задовольняє нерівність

$$|\psi_m(z)| \leq \omega_2 K(m) \gamma\left(\frac{a}{2}x\right) \rho(b_n y), \gamma = 1/\rho,$$

$$z = x + iy, |x| \geq \Delta_1, |y| \geq \Delta_2,$$

де $b_1 = B$, $K(m) = B_1^m \left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m$, сталі ω_2 , a , b_1 , $B_1 > 0$ не залежать від $m \in \mathbb{N}$. Аналогічну нерівність ψ_m задовольняє і в точці $z = x + iy$, де $|x| \leq \Delta_1$, $|y| \leq \Delta_2$. Звідси вже випливає, що $\psi_m(z)$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, а, отже, $\psi_m(x) \in S_{m_k}^{m_n}$. Таким чином, оператор $D^m(F, \cdot)$ визначений коректно на $S_{m_k}^{m_n}$ і відображає цей простір в себе.

Аналогічно доводимо, що кожен обмежену множину з $S_{m_k}^{m_n}$ оператор $D^m(F, \cdot)$ відображає в обмежену множину цього ж простору. Теорема доведена.

Як приклад оператора $D^n(F, \cdot)$ розглянемо оператор, який будується за функцією

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{Q(1)Q(2) \dots Q(k)}, \end{aligned} \quad (18)$$

де $Q(x)$ – поліном: $Q(x) = a_p x^p + \dots + a_1 x$, причому $Q(k) \neq 0$, $k \in \{1, 2, \dots\}$. При великих k коефіцієнт $a_k \sim \frac{1}{a_p^k (k!)^p}$, як показано в [1, с. 75], F – ціла функція порядку $1/p$ і типу $\sigma = p/\sqrt[p]{|a_p|}$. Якщо $Q(x) = x$, то $F(x) = e^x$.

У випадку (18) маємо (див. [1, с. 75]), що

$$D^n(F, \varphi) = \sum_{k=n}^{np} \frac{\Delta_k^{(n)}}{k!} x^{k-n} \varphi^{(k)}(x), \quad (19)$$

де коефіцієнти $\Delta_k^{(n)}$ знаходяться з розкладу

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= Q(x)Q(x-1) \dots Q(x-n+1) = \\ &= \sum_{k=n}^{np} \frac{\Delta_k^{(n)}}{k!} x(x-1) \dots (x-k+1), \end{aligned} \quad (20)$$

тобто мають вигляд

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(n)} &= \psi_n(k) - C_k^1 \psi_n(k-1) + C_k^2 \psi_n(k-2) - \dots + \\ &+ (-1)^k \psi_n(0), \quad k \in \{0, 1, \dots, np\}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що оскільки $\psi_n(0) = \psi_n(1) = \dots = \psi_n(n-1) = 0$ (бо $Q(0) = 0$), то $\Delta_0^{(n)} = \Delta_1^{(n)} = \dots = \Delta_{n-1}^{(n)} = 0$.

Формула (20) має місце для довільної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$. Справді, якщо $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$, то при $k \geq n$

$$\begin{aligned} x^{k-n} \varphi^{(k)}(x) &= \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1) \dots (m-k+1) b_m x^{m-n} = \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1) \dots (m-k+1) b_m x^{m-n}. \end{aligned}$$

Позначимо через A праву частину співвідношення (20); тоді

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=n}^{np} \frac{\Delta_k^{(n)}}{k!} \left(\sum_{m=n}^{\infty} m(m-1) \dots (m-k+1) b_m x^{m-n} \right) = \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} b_m \left(\sum_{k=n}^{np} \frac{\Delta_k^{(n)}}{k!} m(m-1) \dots (m-k+1) x^{m-n} \right). \end{aligned}$$

Згідно з (20) маємо, що $A = \sum_{m=n}^{\infty} b_m \psi_n(m) x^{m-n}$. Але

$$\psi_n(m) = Q(m)Q(m-1) \dots Q(m-n+1) = \frac{a_{m-n}}{a_m},$$

тобто

$$A = \sum_{m=n}^{\infty} b_m \frac{a_{m-n}}{a_m} x^{m-n} = D^n(F, \varphi).$$

Зазначимо, що коефіцієнти

$$a_k = \frac{1}{Q(1)Q(2) \dots Q(k)}, \quad k \geq 1,$$

функції F задовольняють умову (9). Справді,

$$\frac{a_k}{a_{k+m}} = Q(k+1)Q(k+2)\dots Q(k+m),$$

причому

$$|Q(k)| \leq k^p(|a_p| + |a_{p-1}| + \dots + |a_1|) = p \max_{1 \leq i \leq p} |a_i| \cdot k^p = p \cdot a_0 k^p.$$

Тоді

$$|Q(k+1)| \leq a_0 p(k+1)^p, |Q(k+2)| \leq a_0 p(k+2)^p, \dots, |Q(k+m)| \leq a_0 p(k+m)^p.$$

Отже,

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+m}} \right| = |Q(k+1)| \dots |Q(k+m)| \leq a_0^p p^m (k+m)^{pm}.$$

Вважаємо, що $k \geq m$. Тоді

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+m}} \right| \leq a_0^m p^m 2^{mp} k^{pm}.$$

Відомо, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$ ($\varepsilon > 0$ – довільно фіксоване). Звідси випливає, що знайдеться стала $c_0 > 0$ така, що для всіх $k \geq 1$ справджується нерівність $\ln k \leq c_0 k^\varepsilon$ або $\ln k^{pm} \leq c_0 k^{\varepsilon pm}$. Покладемо $\varepsilon = 1/(pm)$. Тоді $\ln k^{pm} \leq c_0 k$. Отже,

$$k^{pm} = e^{\ln k^{pm}} \leq e^{c_0 k} \leq e^{c_0(k+m)} = L_0^{k+m},$$

де $L_0 = e^{c_0} > 1$. Таким чином,

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+m}} \right| \leq \gamma^m \cdot k^{pm} \leq \gamma^{m+k} L_0^{m+k} = L^{m+k},$$

де $\gamma = \max\{1, a_0 p \cdot 2^p\}$, $L = \gamma L_0 > 1$, що й потрібно було довести.

У праці [8] наведено приклад послідовності $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$, при якій оператор узагальненого диференціювання збігається з похідною Джексона: $D_\alpha = D_q$, якщо $\alpha_n = \frac{1}{[n]_q!}$, де $[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $[n]_q! = [1]_q [2]_q \dots [n]_q$ при $n \geq 1$ і $\alpha_0 = 1$.

Правильним є також таке твердження.

Теорема 3. При виконанні умови $\frac{\rho'}{\rho} \leq$

$\frac{\tilde{\gamma}'}{\tilde{\gamma}}$, $\tilde{\gamma} = 1/\gamma$, оператор узагальненого диференціювання $D^n(F, \cdot)$ визначений коректно на $S_{m_k}^{m_n}$ для довільно фіксованого $n \in \mathbb{N}$ і неперервно відображає цей простір в себе.

4. Оператори узагальненого диференціювання нескінченного порядку

Нехай $g(z) = \sum_{m=0}^\infty c_m z^m$, $z \in \mathbb{C}$,

– деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ задано оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонт'єва нескінченного порядку $g(D(F, \cdot)) \equiv \sum_{m=0}^\infty c_m D^m(F, \cdot)$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ ряд

$$g(D(F, \varphi))(x) := \sum_{m=0}^\infty c_m D^m(F, \varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

зображає деяку функцію з простору $S_{m_k}^{m_n}$

або, інакше, ряд $\sum_{m=0}^\infty c_m D^m(F, \varphi)(z)$, $z \in \mathbb{C}$, зображає функцію з простору $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, яка є аналітичним продовженням функції $g(D(F, \varphi))(x)$ у комплексну площину $\mathbb{C}$.

Теорема 4. Якщо ціла функція g задовольняє умову

$$\exists a > 0 \exists b > 0 \exists c > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|g(z)| \leq C \rho(ax) \rho(by), \quad (21)$$

то в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений оператор $A_g := g(D(F, \cdot))$, який неперервно відображає $S_{m_k}^{m_n}$ в $S_{m_k}^{m_n}$.

Доведення. Нехай $\psi(x) := g(D(F, \varphi))(x)$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$. Оскільки

$$(\psi(x) \in S_{m_k}^{m_n}) \Leftrightarrow (\psi(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})),$$

то доведемо, що $\psi(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. При доведенні теореми 2 встановлено, що $D^m(F, \varphi)(x)$ є елементом простору $S_{m_k, A}^{m_n, B} \subset S_{m_k}^{m_n}$ (для довільного $m \in \mathbb{N}$), де сталі $A, B > 0$ не залежать від m ; при цьому справджується нерівність

$$|D^m(F, \varphi)(z)| \leq c_0 \beta_1^m \left(\frac{1}{\nu_m} \right)^m \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y),$$

$$\gamma = 1/\rho, z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad (22)$$

де сталі $c_0, \beta_1 > 0, a_1, b_1 > 0$ не залежать від m . Коефіцієнти Тейлора $c_m, m \in \mathbb{Z}_+$, функції g обчислюються за формулою Коші

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{z^{m+1}} dz, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Нехай $\tilde{a} = \max\{a, b\}$. Звідси та (21) випливає, що

$$\begin{aligned} |c_m| &\leq c \inf_{R>0} (R^{-m} \rho^2(\tilde{a}R)) \leq c \inf_{R>0} (R^{-m} \rho(2\tilde{a}R)) \\ &= c(2\tilde{a})^m \inf_{R>0} (R^{-m} \rho(R)) \end{aligned}$$

(тут ми скористалися нерівністю (16) для функції ρ , з якої випливає нерівність $\rho^2(\tilde{a}R) \leq \rho(2\tilde{a}R)$). Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 2, знаходимо, що

$$|c_m| \leq c(2\tilde{a}e)^m \left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Урахувавши (22) знайдемо, що

$$|\psi(z)| \leq c \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2\tilde{a}e\beta_1}{\nu_m^2}\right)^m \gamma(a_1x)\rho(b_1y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Оскільки $\nu_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$, то згідно з ознакою Коші збіжності знакодода- тних числових рядів ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2\tilde{a}e\beta_1}{\nu_m^2}\right)^m$ збі- жний. Таким чином,

$$|\psi(z)| \leq \tilde{c}\gamma(a_1x)\rho(b_1y), \quad \gamma = 1/\rho, z \in \mathbb{C}. \quad (23)$$

З (23) та теореми 1 випливає, що $\psi(x)$ є еле- ментом простору $S_{m_k}^{m_n}$. Із наведених мірку- вань випливає також, що оператор Ag від- ображає кожну обмежену множину простору $S_{m_k}^{m_n}$ в обмежену множину простору $S_{m_k}^{m_n}$, тобто оператор Ag неперервний.

Теорема доведена.

Наприклад, функція $g(z) = e^{\alpha z}, x \in \mathbb{C}$, де $\alpha > 0$ – фіксований параметр, задовольняє умову (21). Справді,

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |e^{\alpha z}| = |e^{\alpha(x+iy)}| = e^{\alpha x} \leq e^{\alpha|x|}.$$

Для довільної опуклої функції M при до- вільному $\varepsilon > 0$ правильною є нерівність

$$|x| \leq M(\varepsilon x) + M(\varepsilon y) + d, d = d(\varepsilon) > 0.$$

Оскільки $\ln \rho$ – опукла на $[0, \infty)$ і парна на $\mathbb{R}$ функція, то для $\alpha \in (0, 1)$

$$|e^{\alpha z}| \leq e^{\alpha|x|} \leq ce^{\ln \rho(\varepsilon x) + \ln \rho(\varepsilon y)} = c\rho(\varepsilon x)\rho(\varepsilon y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Якщо $\alpha \geq 1$, то для довільної опуклої на проміжку $[0, \infty)$ функції M справджується нерівність $\alpha M(x) \leq M(\alpha x), x \in [0, \infty)$. От- же,

$$|e^{\alpha z}| \leq e^{\alpha|x|} \leq ce^{\alpha \ln \rho(\varepsilon x) + \alpha \ln \rho(\varepsilon y)} \leq$$

$$\leq ce^{\ln \rho(\alpha \varepsilon x) + \ln \rho(\alpha \varepsilon y)} =$$

$$= c\rho(\alpha \varepsilon x)\rho(\alpha \varepsilon y), z = x + y \in \mathbb{C}.$$

Звідси вже випливає, що для $e^{\alpha z}$ справ- джується умова (21) (наприклад, при $\varepsilon = 1$), тобто в $S_{m_k}^{m_n}$ визначений і є неперервним опе- ратор

$$e^{\alpha D(F, \cdot)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m D^m(F, \cdot)}{m!},$$

який відображає $S_{m_k}^{m_n}$ в себе.

Якщо $B := D^p(D, \cdot)$, де $p \geq 2$ фіксоване, то міркуючи аналогічно попередньому до- водимо, що в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений і є неперервним оператор $e^{\alpha B} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m B^m / m!$, який відображає цей простір в себе (тут вра- ховано, що $(D^p(F, \cdot))^m = D^{m+p}(F, \cdot)$).

$$\text{Нехай } P(z) = \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\alpha_0 = \max_{1 \leq k \leq p_0} |\alpha_k|, \quad P(A) = \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k D^k(F, \cdot) \equiv \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k A^k, \quad A^k := D^k(F, \cdot). \text{ Оскільки}$$

$$|(A^k \varphi)(z)| \leq c_0 \left(\frac{a_0}{\nu_k}\right)^k \gamma(a_1x)\rho(b_1y),$$

$$\gamma = 1/\rho, z = x + iy \in \mathbb{C},$$

для довільної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, де сталі $c_0, a_0 > 0$ не залежать від k , то

$$|(A^j \varphi)(z)| \leq c_0 \omega_0^k \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y),$$

$$\omega_0 = \max \left\{ 1, \frac{a_0}{\nu_1} \right\}, \forall j : 1 \leq j \leq k.$$

Тоді

$$|P(A)\varphi(z)| \leq \tilde{c}_0 \omega_0^{p_0} \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y), z \in \mathbb{C}. \quad (24)$$

З (24) випливає, що для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ правильною є нерівність

$$|P^n(A)\varphi(z)| \leq \tilde{c}_0^n \omega_0^{p_0 n} \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y), z \in \mathbb{C}. \quad (25)$$

Урахувавши (25), (21) та застосувавши методику доведення теореми 4 встановлюємо, що в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений оператор $e^{tP(A)}$ ($t > 0$ – фіксований параметр), тобто для довільної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n(A)\varphi(x) := e^{tP(A)}\varphi(x) \quad (26)$$

зображає функцію $\psi = e^{tP(A)}\varphi$, яка при кожному $t > 0$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому оператор $e^{tP(A)}: S_{m_k}^{m_n} \rightarrow S_{m_k}^{m_n}$ є неперервним. Звідси та з (25) випливає, що елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$ є також функція $P(A)e^{tA}\varphi$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$.

Нехай $S_{k,t,\varphi}$ позначає частинну суму ряду (26). Тоді $S_{k,t,\varphi} \rightarrow e^{tP(A)}\varphi$ при $k \rightarrow \infty$ за топологією простору $S_{m_k}^{m_n}$. Отже,

$$\begin{aligned} P(A)e^{tP(A)}\varphi &= P(A) \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k,t,\varphi} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P(A)S_{k,t,\varphi} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi. \end{aligned} \quad (27)$$

5. Задача Коші

У просторі $S_{m_k}^{m_n}$ розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, T < \infty, \quad (28)$$

$$\text{де } P(A) = \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k D^k(F, \cdot),$$

$$u(t, \cdot)|_{t=0} = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in S_{m_k}^{m_n}. \quad (29)$$

Під розв'язком задачі (28), (29) розумітимемо функцію $u(t, x)$, диференційовну по t , яка при кожному $t \in [0, T]$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$, задовольняє рівняння (28) і початкову умову (29) в тому розумінні, що $u(t, \cdot) \rightarrow \varphi_0$ при $t \rightarrow +0$ за топологією простору $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому u неперервно залежить від φ_0 .

Теорема 5. *Задача Коші (28), (29) розв'язна в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ (у вказаному розумінні); розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t, x) = e^{tP(A)}\varphi_0(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n(A)\varphi_0(x).$$

Доведення. Введемо позначення $Q(t, A)\varphi_0 := e^{tP(A)}\varphi_0$,

$$\Phi_{t,\Delta t}(x) :=$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta t} [Q(t + \Delta t, A)\varphi_0(x) - Q(t, A)\varphi_0(x)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{(t + \Delta t)^n - t^n}{n!} \right] P^n(A)\varphi_0(x). \end{aligned}$$

Доведемо, що функція $[0, T] \ni t \rightarrow Q(t, A)\varphi_0 \in S_{m_k}^{m_n}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$, диференційовна по t у кожній точці $t \in [0, T]$. Зафіксуємо довільно $t_0 \in [0, T]$ і доведемо, що існує елемент $\psi \in S_{m_k}^{m_n}$ такий, що $\Phi_{t_0,\Delta t} \rightarrow \psi$ при $\Delta t \rightarrow 0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, або, що $\Psi_{t_0,\Delta t} := \Phi_{t_0,\Delta t} - \psi \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Це означає, що сім'я функцій $\{\Psi_{t_0,\Delta t}(z)\}$ рівномірно (по z) збігається до нуля при $\Delta t \rightarrow 0$ в будь-якій обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ і при цьому справджується оцінка

$$|\Psi_{t_0,\Delta t}(z)| \leq \tilde{c} \gamma(\tilde{a}x) \rho(\tilde{b}y), \gamma = 1\rho, z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad (30)$$

зі сталими $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0$, не залежними від Δt .

Доведемо, що

$$\begin{aligned} \psi &= P(A)e^{t_0 A}\varphi_0 \equiv Q(t_0, A)\varphi_0 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_0^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi_0. \end{aligned}$$

Користуючись теоремою Лагранжа про скінченні простоти знайдемо, що

$$\begin{aligned}\Psi_{t_0, \Delta t}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_0 + \theta \Delta t)^{n-1}}{(n-1)!} P^n(A) \varphi_0(z) - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_0^n}{n!} P^{n+1}(A) \varphi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_0 + \theta \Delta t)^n}{n!} \times \\ &\times P^{n+1}(A) \varphi_0(z) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_0^n}{n!} P^{n+1}(A) \varphi_0(z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_0 + \theta \Delta t)^n - t_0^n}{n!} P^{n+1}(A) \varphi_0(z), \quad (31) \\ 0 &< \theta < 1.\end{aligned}$$

Звідси та з (27) випливає, що $\Psi_{t_0, \Delta t} \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ при кожному Δt . Якщо вважати, що $t_0 + \Delta t \leq T$, то внаслідок доведеного раніше стверджуємо, що нерівність (30) виконується зі сталими

$$\tilde{c} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{L}^n}{n!} \equiv 2e^{\tilde{L}}, \tilde{L} = \tilde{c}_0 \omega_0^{p_0} T, \tilde{a} = a_1, \tilde{b} = b_1.$$

Якщо $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ – обмежена область в $\mathbb{C}$, то внаслідок (25) правильними є нерівності $|P^n(A) \varphi_0(z)| \leq c \tilde{c}_0 \omega_0^{p_0 n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де $c = c(\mathbb{K}) > 0$. Крім того, для досить малих значень $|\Delta t|$

$$\begin{aligned}(t_0 + \theta \Delta t)^n - t_0^n &= \sum_{k=1}^n C_n^k (\theta \Delta t)^k t_0^{n-k} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n C_n^k |\Delta t|^k T^{n-k} \leq \tilde{T}^n 2^n |\Delta t|, \\ \tilde{T} &= \max\{1, T\}.\end{aligned}$$

Отже, $|\Psi_{t_0, \Delta t}(z)| \leq C |\Delta t|$, $z \in \mathbb{K}$, де $C = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \equiv ce^M$, $M = 2\tilde{c}_0 \omega_0^{p_0} \tilde{T}$. Звідси випливає, що $\Psi_{t_0, \Delta t} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ рівномірно по $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Цим доведено, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} e^{tP(A)} \varphi_0(x) &= P(A) e^{tP(A)} \varphi_0(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A) \varphi_0(x), x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Отже, функція $u(t, x) = e^{tP(A)} \varphi_0(x)$ є розв'язком рівняння (28).

Функція $e^{tP(A)} \varphi_0$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$, диференційовна по t , а, отже, і неперервна по t у кожній точці $t_0 \in [0, T]$, тобто

$$e^{tP(A)} \varphi_0 \rightarrow e^{t_0 P(A)} \varphi_0, t \rightarrow t_0,$$

за топологією простору $S_{m_n}^{m_n}$. Зокрема, $e^{tP(A)} \varphi_0 \rightarrow \varphi_0$ при $t \rightarrow +0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, що й потрібно було встановити.

Якщо $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset S_{m_k}^{m_n}$ і $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ при $n \rightarrow \infty$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, то з властивості неперервності оператора $e^{tP(A)}$ у цьому просторі (при фіксованому $t > 0$) впливає співвідношення

$$u_n = e^{tP(A)} \varphi_n \rightarrow e^{tP(A)} \varphi_0 = u, n \rightarrow \infty,$$

що й означає неперервну залежність u від φ_0 .

Теорема доведена.

Зауваження 1. Аналогічний результат має місце у випадку, коли в рівнянні (28) $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}$, де $t_0 \geq 0$, а початкова умова має вигляд $u(t, \cdot)|_{t=t_0} = \varphi_0 \in S_{m_k}^{m_n}$. Розв'язок такої задачі Коші дається формулою

$$u(t, x) = e^{(t-t_0)P(A)} \varphi_0(x), \quad (t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}.$$

6. Нелокальна двоточкова за часом задача для еволюційного рівняння з оператором узагальненого диференціювання

Символом A позначимо оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонт'єва $D^p(F, \cdot)$, $p \geq 1$ – фіксоване. Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (32)$$

розглянемо нелокальну двоточкову за часом задачу

$$\mu_1 u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_2 u(t, \cdot)|_{t=T} = \varphi, \varphi \in S_{m_k}^{m_n}, \quad (33)$$

де $T \in (0, \infty)$, $\{\mu_1, \mu_2\} \subset (0, \infty)$ – фіксовані числа, $\mu_1 > \mu_2$.

Під розв'язком задачі (32), (33) розумітимемо функцію $u(t, x)$, диференційовну по t ,

яка при кожному $t \in [0, T]$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$, задовольняє рівняння (32) і умову (33) в тому розумінні, що $\mu_1 \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \mu_2 \lim_{t \rightarrow T-0} u(t, \cdot) = \varphi$, де границі розглядаються в просторі $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому u неперервно залежить від φ .

Теорема 6. Двоточкова задача (32), (33) розв'язна в просторі $S_{m_k}^{m_n}$; розв'язок цієї задачі дається формулою

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mu_2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(t+nT)A} \varphi(x) = \\ &= \mu_2^{-1} e^{tA} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{nTA} \varphi(x) \right), \\ \mu &= \mu_1 / \mu_2 > 1. \end{aligned}$$

Доведення. Передусім доведемо, що функція, яка формально зображається рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} e^{nTA} \varphi := \psi$, є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$. Із результатів, отриманих у пункті 4 випливає, що $e^{nTA} \varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ при кожному фіксованому $n \in \mathbb{Z}_+$; при цьому справджуються нерівності

$$\begin{aligned} |e^{nTA} \varphi(z)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} |(A^k \varphi)(z)| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} |D^{k+p}(F, \varphi)(z)| \leq \\ &\leq c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} \left(\frac{\beta_1}{\nu_{k+p}} \right)^{k+p} \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y) \leq \\ &\leq \tilde{c}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} \left(\frac{\beta_1}{\nu_k} \right)^k \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y), \end{aligned}$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де сталі $a_1, b_1, \beta_1 > 0$ не залежать від k , $p, \tilde{c}_0 = c_0 \left(\frac{\beta_1}{\nu_p} \right)^p$, послідовність $\{\nu_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно зростає:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} \left(\frac{\beta_1}{\nu_k} \right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!} = e^{n\alpha} =$$

$$= (e^\alpha)^n, \alpha = \frac{\beta_1 T}{\nu_1}.$$

Таким чином,

$$|e^{nTA} \varphi(z)| \leq \tilde{c}_0 (e^\alpha)^n \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y).$$

Тоді

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|e^{nTA} \varphi(z)|}{\mu^n} \leq \\ &\leq \tilde{c}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^\alpha}{\mu} \right)^n \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y). \end{aligned}$$

За умови $\mu > e^\alpha$ правильною є нерівність

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\leq c_1 \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y), \\ c_1 &= \tilde{c}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^\alpha}{\mu} \right)^n < \infty. \end{aligned}$$

Звідси вже дістаємо, що $\psi(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Отже, $\psi(x)$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$.

Із результатів, отриманих у пункті 5 випливає, що функція

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mu_2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(t+nT)A} \varphi(x) = \\ &= \mu_2^{-1} \mu^{-1} e^{tA} \psi(x) = \mu_1^{-1} e^{tA} \psi(x) \end{aligned}$$

задовольняє рівняння (32). Доведемо, що ця функція задовольняє також граничну умову (33) у вказаному розумінні.

При доведенні теореми 5 встановлено, що функція $[0, T] \ni t \rightarrow e^{tA} \psi, \psi \in S_{m_k}^{m_n}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ диференційовна, а, отже, і неперервна в кожній точці $t \in [0, T]$. Отже, граничні співвідношення $\lim_{t \rightarrow +0} e^{tA} \psi = \psi$,

$\lim_{t \rightarrow T-0} e^{tA} \psi = e^{TA} \psi$ справджуються в просторі $S_{m_k}^{m_n}$. Тоді

$$\begin{aligned} \mu_1 \lim_{t \rightarrow +0} \mu_1^{-1} e^{tA} \psi - \mu_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \mu_1^{-1} e^{tA} \psi &= \psi - \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{TA} \psi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} e^{nTA} \varphi - \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(T+nT)A} \varphi = \\ &= (\varphi + \mu^{-1} e^{TA} \varphi + \mu^{-2} e^{2TA} \varphi + \dots) - \\ &\quad - (\mu^{-1} e^{TA} \varphi + \mu^{-2} e^{2TA} \varphi + \dots) = \varphi. \end{aligned}$$

Цим доведено, що функція $u(t, x) = \mu_1^{-1} e^{-tA} \psi(x)$ задовольняє умову (33) у вказаному розумінні.

Зауваження 2. Урахувавши оцінку (25) можна довести, що твердження, аналогічне теоремі 6 має місце у випадку двоточкової задачі для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (34)$$

де $P(\lambda)$ – поліном, розглянутий в пункті 4. Двоточкова задача з граничною умовою вигляду (33) для рівняння (34) розв’язна в просторі $S_{m_k}^{m_n}$. Розв’язок такої задачі дається формулою

$$u(t, x) = \mu_1^{-1} e^{tP(A)} \psi(x), \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} e^{nTP(A)} \varphi(x), \{\varphi, \psi\} \subset S_{m_k}^{m_n}.$$

7. Оператор, спряжений з оператором узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва

Нехай $A^n := D^n(F, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване. Символом $(A^n)^*$ позначимо оператор, спряжений з оператором узагальненого диференціювання A^n . Оскільки $A^n: S_{m_k}^{m_n} \rightarrow S_{m_k}^{m_n}$, то $(A^n)^*: (S_{m_k}^{m_n})' \rightarrow (S_{m_k}^{m_n})'$.

Кожній функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ зіставимо у відповідність послідовність її коефіцієнтів Тейлора $b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$, де C_0 – простір збіжних до нуля послідовностей. При цьому різним функціям з простору $S_{m_k}^{m_n}$ відповідають різні послідовності з C_0 . Справді, якщо $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset S_{m_k}^{m_n}$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то існує $k \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $b_k(\varphi_1) \neq b_k(\varphi_2)$, бо інакше, для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ матимемо, що $\varphi_1^{(k)}(0) = \varphi_2^{(k)}(0)$, тобто

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_2^{(k)}(0)}{k!} x^k = \\ &= \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отже, відображення

$$B: S_{m_k}^{m_n} \ni \varphi \rightarrow b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$$

є ін’єкцією. Відображення B як оператор є, очевидно, лінійним, який має обернений, бо $\text{Ker } B = \{0\}$.

Відображення B зіставляє функції $\psi_n := D^n(F, \varphi) \equiv A^n \varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ послідовність

$$b_{\psi_n} = \left\{ b_n \frac{a_0}{a_n}, b_{n+1} \frac{a_1}{a_{n+1}}, b_{n+2} \frac{a_2}{a_{n+2}}, \dots \right\} \in C_0.$$

Розглянемо оператор $\tilde{A}^n: C_0 \rightarrow C_0$, який кожній послідовності $b_\varphi = B\varphi \in C_0$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$, ставить у відповідність послідовність $B\psi_n$, тобто $\tilde{A}^n B\varphi = b_{\psi_n} = B A^n \varphi$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$. Із останнього співвідношення випливає, що

$$(\tilde{A}^n B)^* = (B A^n)^*, \quad (A^n)^* B^* = B^* (\tilde{A}^n)^*.$$

Отже, оператор, спряжений до оператора A^n можна подати у вигляді: $(A^n)^* = B^* (\tilde{A}^n)^* (B^*)^{-1}$, при цьому

$$(\tilde{A}^n)^*: C'_0 \rightarrow C'_0, B^*: C'_0 \rightarrow (S_{m_k}^{m_n})',$$

$$(B^*)^{-1}: (S_{m_k}^{m_n})' \rightarrow C'_0,$$

$$(\tilde{A}^n)^* (B^*)^{-1}: (S_{m_k}^{m_n})' \rightarrow C'_0.$$

Візьмемо довільний функціонал $g \in C'_0$. Відомо, що $C'_0 \cong l_1$, де l_1 – простір абсолютно сумовних послідовностей $g = \{g_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Дія функціоналу $g \in C'_0 \cong l_1$ на елемент $b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$ подається за допомогою формули

$$\langle g, b_\varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\varphi) \bar{g}_k.$$

Отже, для довільного $g \in C'_0$ маємо, що

$$\begin{aligned} \langle g, B A^n \varphi \rangle &= \langle g, \tilde{A}^n B \varphi \rangle = \langle (\tilde{A}^n)^* g, B \varphi \rangle = \\ &= \langle (\tilde{A}^n)^* g, b_\varphi \rangle; \\ \langle g, \tilde{A}^n B \varphi \rangle &= \langle g, \tilde{A}^n b_\varphi \rangle = \\ &= \langle g, b_{\psi_n} \rangle = b_n \frac{a_0}{a_n} \bar{g}_0 + b_{n+1} \frac{a_1}{a_{n+1}} \bar{g}_1 + \\ &+ b_{n+2} \frac{a_2}{a_{n+2}} \bar{g}_2 + \dots = b_n \frac{\bar{a}_0}{a_n} g_0 + b_{n+1} \frac{\bar{a}_1}{a_{n+1}} g_1 + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Нехай

$$(\tilde{A}^n)^* g := g^* = \{g_0^*, g_1^*, \dots\} \in C'_0 \cong l_1;$$

з (35) випливає, що

$$\langle (\tilde{A}^n)^* g, b_\varphi \rangle = b_0 \bar{g}_0^* + \dots + b_{n-1} \bar{g}_{n-1}^* + b_n \bar{g}_n^* +$$

$$+b_{n+1}\overline{g_{n+1}^*}+\dots=b_n\overline{\frac{\bar{a}_0}{a_n}}g_0+b_{n+1}\overline{\frac{\bar{a}_1}{a_{n+1}}}g_1+\dots$$

Отже,

$$g^*=\left\{0,\dots,0,\frac{\bar{a}_0}{a_n}g_0,\frac{\bar{a}_1}{a_{n+1}}g_1,\dots\right\}. \quad (36)$$

У просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$ розглянемо рівняння

$$\frac{du(t)}{dt}=(A^n)^*u(t), \quad t\in[0,T], T<\infty, \quad (37)$$

під розв'язком якого розумітимемо абстрактну функцію параметра t із значеннями в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$, яка задовольняє це рівняння.

Якщо для рівняння (37) задано умову

$$\mu_1u|_{t=0}-\mu_2u|_{t=T}=\psi, \quad \psi\in(S_{m_k}^{m_n})', \quad (38)$$

($\mu_1, \mu_2 > 0, \mu_1 \neq \mu_2$ – фіксовані параметри), то під розв'язком двоточної задачі (37), (38) розумітимемо розв'язок рівняння (37), який задовольняє умову (38) в слабкому розумінні, тобто $\mu_1 \lim_{t \rightarrow +0} \langle u(t), \varphi \rangle - \mu_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \langle u(t), \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$ для довільної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$.

Оскільки $(A^n)^* = B^*(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}$, то рівняння (37) має вигляд

$$\frac{du(t)}{dt}=B^*(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t) \quad (39)$$

Під дією відображення $(B^*)^{-1}$ рівняння (39) перейде в рівняння

$$(B^*)^{-1}\frac{du(t)}{dt}=(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t), \quad (40)$$

при цьому

$$\mu_1(B^*)^{-1}u|_{t=0}-\mu_2(B^*)^{-1}u|_{t=T}=(B^*)^{-1}\psi\in C_0'. \quad (41)$$

Введемо позначення: $(B^*)^{-1}u(t):=g(t)\in C_0'$. Оскільки $C_0'\cong l_1$, то $g(t)=\{g_0(t),g_1(t),\dots\}$. Скориставшись формулою (35) знайдемо, що

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t)&=(\tilde{A}^n)^*g(t):=g^*(t)= \\ &=\left\{\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},\frac{\bar{a}_0}{a_n}g_0(t),\frac{\bar{a}_n}{a_{n+1}}g_1(t),\dots\right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

$g(t)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі C_0' , диференційовна по t . Справді,

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt}&=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}= \\ &=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}(B^*)^{-1}\left[\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}\right]= \\ &=(B^*)^{-1}\left[\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}\right]=(B^*)^{-1}\frac{du}{dt} \end{aligned}$$

(тут ми скористалися тим, що $\frac{\Delta u}{\Delta t}\rightarrow\frac{du}{dt}$ при $\Delta t\rightarrow 0$ в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$ внаслідок диференційовності $u(t)$, $t\in[0,T]$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$). Отже,

$$\begin{aligned} (B^*)^{-1}\frac{du(t)}{dt}&=\frac{d}{dt}((B^*)^{-1}u(t))= \\ &=\{g_0'(t),g_1'(t),\dots\}, t\in[0,T]. \end{aligned} \quad (43)$$

Із співвідношень (42), (43) та рівняння (40) випливає, що

$$g_0'(t)=0,g_1'(t)=0,\dots,g_{n-1}'(t)=0, \quad t\in[0,T],$$

тобто

$$g_0(t)=c_0,g_1(t)=c_1,\dots,g_{n-1}(t)=c_{n-1}, t\in[0,T],$$

де $c_i=\text{const}$, $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Тоді

$$g_n'(t)=\frac{\bar{a}_0}{a_n}g_0(t)=\frac{\bar{a}_0}{a_n}c_0,$$

$$g_{n+1}'(t)=\frac{\bar{a}_n}{a_{n+1}}g_1(t)=\frac{\bar{a}_1}{a_{n+1}}c_1,$$

.....

$$g_{2n-1}'(t)=\frac{\bar{a}_{n-1}}{a_{2n-1}}g_{n-1}(t)=\frac{\bar{a}_{n-1}}{a_{2n-1}}c_{n-1}.$$

Звідси дістаємо, що

$$g_n(t)=\frac{\bar{a}_0}{a_n}c_0t+c_n,$$

$$g_{n+1}(t)=\frac{\bar{a}_1}{a_{n+1}}c_1t+c_{n+1},$$

.....

$$g_{2n-1}(t)=\frac{\bar{a}_{n-1}}{a_{2n-1}}c_{n-1}t+c_{2n-1}.$$

Нехай $(B^*)^{-1}\psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots\} \in C'_0 \cong l_1$. Врахувавши умову (41), а також неперервність $g(t)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі C'_0 знайдемо, що

$$\begin{aligned} & \mu_1 g(t)|_{t=0} - \mu_2 g(t)|_{t=T} = \\ & = \mu_1 \lim_{t \rightarrow +0} \{g_0(t), g_1(t), \dots\} - \\ & - \mu_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \{g_0(t), g_1(t), \dots\} = \\ & = \mu_1 \{g_0(0), g_1(0), \dots\} - \\ & - \mu_2 \{g_0(T), g_1(T), \dots\}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\mu_1 g_i(0) - \mu_2 g_i(T) = \psi_i, i \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (44)$$

Якщо $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, то, внаслідок отриманих раніше співвідношень, (44) набуває вигляду $\mu_1 c_l - \mu_2 c_l = \psi_l$, тобто $c_l = \frac{\psi_l}{\mu_1 - \mu_2}$, $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Якщо $i \in \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$, то

$$\mu_1 c_i - \mu_2 \left(\frac{\bar{a}_l}{\bar{a}_i} c_l T + c_i \right) = \psi_i,$$

$l \in \{0, 1, \dots, n-1\}, i \in \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$, або

$$\begin{aligned} c_i(\mu_1 - \mu_2) &= \frac{\bar{a}_l c_l}{\bar{a}_i} \mu_2 T + \psi_i, c_i = \\ &= \frac{\psi_i}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\bar{a}_l}{\bar{a}_i} \frac{\mu_2 T \psi_l}{(\mu_1 - \mu_2)^2}. \end{aligned}$$

Наприклад,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} \frac{\mu_2 T \psi_0}{(\mu_1 - \mu_2)^2}, \\ c_{n+1} &= \frac{\psi_{n+1}}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_{n+1}} \frac{\mu_2 T \psi_1}{(\mu_1 - \mu_2)^2}, \dots \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} t + \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} \frac{\mu_2 T \psi_0}{(\mu_1 - \mu_2)^2} = \\ &= \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \left[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T \right] + \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_{2n-1}(t) &= \frac{\bar{a}_{n-1}}{\bar{a}_{2n-1}} \frac{\psi_{n-1}}{\mu_1 - \mu_2} \left[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\psi_{2n-1}}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Далі знаходимо, що

$$\begin{aligned} g'_{2n}(t) &= \frac{\bar{a}_n}{\bar{a}_{2n}} g_n(t) = \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_{2n}} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \left[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T \right] + \\ &+ \frac{\bar{a}_n}{\bar{a}_{2n}} \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2}, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} g_{2n}(t) &= \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_{2n}} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} t \right] + \\ &= \frac{\bar{a}_n}{\bar{a}_{2n}} \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} t + c_{2n}. \end{aligned}$$

З урахуванням (44) маємо співвідношення

$$\mu_1 g_{2n}(0) - \mu_2 g_{2n}(T) = \psi_{2n},$$

яке рівносильне співвідношенню

$$\begin{aligned} \mu_1 c_{2n} - \mu_2 \left[\frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_{2n}} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{T^2}{2} + \frac{\mu_2 T^2}{\mu_1 - \mu_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\bar{a}_n}{\bar{a}_{2n}} \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} T + c_{2n} \right] &= \psi_{2n}, \end{aligned}$$

з якого знаходимо c_{2n} , а, отже, і $g_{2n}(t)$. Продовжуючи цей процес, знайдемо всі координати $g_i(t)$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

Отже, формально розв'язок двоточкової задачі (37), (38) подається у вигляді

$$u(t) = B^* g(t) \equiv B^* \{g_0(t), g_1(t), \dots\} \subset (S_{m_k}^{m_n})'.$$

Оскільки $u(t)$ задовольняє рівняння (37) в слабкому розумінні (в сенсі узагальнених функцій), то з'ясуємо, як діє функціонал $u(t)$ на довільну функцію $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$. Маємо, що

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \langle B^* g(t), \varphi \rangle = \langle g(t), B\varphi \rangle,$$

$B\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $b_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — коефіцієнти Тейлора функції φ , $g(t) \in C'_0 \cong l_1$ при кожному $t \in [0, T]$. Отже, функціонал $g(t) \in C'_0$ діє на елемент $B\varphi \in C_0$ за правилом:

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \langle g(t), B\varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{g_k(t)} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \overline{g_k(t)}, \quad t \in [0, T] \quad (45)$$

$g_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, обчислюються за відповідними формулами. Формула (45) задає функціонал $u(t)$ на $S_{m_k}^{m_n}$ при кожному $t \in [0, T]$; $u(t)$ задовольняє рівняння (37) і умову (38), оскільки

$$\begin{aligned} & \mu_1 \lim_{t \rightarrow +0} \langle u(t), \varphi \rangle - \mu_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \langle u(t), \varphi \rangle = \\ & = \mu_1 \lim_{t \rightarrow +0} \langle g(t), B\varphi \rangle - \mu_2 \lim_{t \rightarrow T-0} \langle g(t), B\varphi \rangle = \\ & = \mu_1 \langle g(0), B\varphi \rangle - \mu_2 \langle g(T), B\varphi \rangle = \mu_1 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{g_k(0)} - \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tilde{\psi}_k = \langle \delta, \varphi \rangle = \langle (B^*)^{-1} \delta, B\varphi \rangle = \varphi(0) = b_0 \\ & - \mu_2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{g_k(T)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (\mu_1 \overline{g_k(0)} - \mu_2 \overline{g_k(T)}) = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \bar{\psi}_k = \langle \psi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Останні співвідношення випливають з того, що гранична умова (38) еквівалентна умові (41), $(B^*)^{-1}u(t) = g(t)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі C'_0 , неперервна по $t \in [0, T]$, тому $g(t) \rightarrow g(0)$ при $t \rightarrow +0$, $g(t) \rightarrow g(T)$ при $t \rightarrow T-0$ в C'_0 .

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 7. Двоточкова задача (37), (38) розв'язна в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$, при цьому

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} g_k(t), \quad t \in [0, T], \quad \varphi \in S_{m_k}^{m_n},$$

$$g(t) = \{g_0(t), g_1(t), \dots\} \in l_1 \cong C'_0$$

при кожному $t \in [0, T]$.

Зауваження 3. Якщо $u(t)$ при кожному $t \in [0, T]$ – регулярна узагальнена функція з простору $(S_{m_k}^{m_n})'$, то

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in S_{m_k}^{m_n}.$$

Очевидно, що формула (45) є більш придатною для застосувань.

Зауваження 4. Якщо $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = 1$, то умова (38) вироджується в початкову умову для рівняння (37). Отже, в цьому випадку задача (37), (38) – задача Коші.

Як приклад, розглянемо задачу (36), (37) з граничним елементом $\psi = \delta \in (S_{m_k}^{m_n})'$, де δ – дельта-функція Дірака. Оскільки $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, то для довільної функції $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in S_{m_k}^{m_n}$ маємо $\varphi(0) = b_0$. Звідси та з формули

знаходимо елемент $(B^*)^{-1}\delta \in C'_0 \cong l_1$: $(B^*)^{-1}\delta = \{1, 0, 0, \dots\}$. Урахувавши співвідношення, які визначають $g(t) = (B^*)^{-1}u(t) = \{g_0(t), g_1(t), \dots\} \in C'_0 \cong l_1$, знайдемо, що

$$\begin{aligned} g(t) = & \left\{ \underbrace{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}, 0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)} \times \right. \\ & \times \left(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} \right), 0, \dots, 0, \\ & \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_{2n}} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\mu_2 T t}{\mu_1 - \mu_2} \right) + \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_{2n}} \frac{\mu_2 T^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \times \\ & \left. \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right), 0, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що у випадку задачі Коші ($\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$)

$$g(t) = \left\{ 1, 0, \dots, 0, \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} t, 0, \dots, 0, \frac{\bar{a}_0}{2\bar{a}_{2n}} t^2, \dots \right\}.$$

Тоді для довільної функції $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in S_{m_k}^{m_n}$

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \frac{b_0}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\bar{a}_0 b_n}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)} \left(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} \right) + \dots$$

Для того, щоб безпосередньо перевірити, що $u(t)$ є розв'язком рівняння (36), переконаємося у тому, що $u(t)$ задовольняє співвідношення $(B^*)^{-1} \frac{du}{dt} = (\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t)$ при

кожному $t \in [0, T]$. Оскільки

$$\begin{aligned}(B^*)^{-1} \frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt}((B^*)^{-1}u(t)) = g'(t) = \\ &= \{g'_0(t), g'_1(t), \dots\} \in l_1,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}g'(t) &= \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)}, 0, \dots, 0, \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_{2n}(\mu_1 - \mu_2)} \left(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} \right), 0, \dots \right\}.\end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t) &= (\tilde{A}^n)^*g(t) \equiv g^*(t) = \\ &= \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n}g_0(t), \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_{n+1}}g_1(t), \dots \right\} \in l_1.\end{aligned}$$

З'ясуємо, чи справджується рівність $g'(t) = g^*(t)$, $t \in [0, T]$. Очевидно, що перші $n - 1$ координат вказаних елементів співпадають. Оскільки $g_0(t) = (\mu_1 - \mu_2)^{-1}$, то

$$g_n^*(t) = \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n}g_0(t) = \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} = g'_n(t), t \in [0, T],$$

$$g_{n+1}^*(t) = \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_{n+1}}g_1(t) = 0 = g'_{n+1}(t), t \in [0, 1],$$

бо $g_{n+1}(t) = 0$ і т.д. Наприклад,

$$g'_{2n}(t) = \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(1 + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} \right),$$

$$\begin{aligned}g_{2n}^*(t) &= \frac{\bar{a}_n}{\bar{a}_{2n}}g_n(t) = \frac{\bar{a}_n}{\bar{a}_{2n}} \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \times \\ &\times \left(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} \right) = g'_{2n}(t).\end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес, знайдемо, що $g'_n(t) = g_n^*(t)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, тобто $g'(t) = g^*(t)$ у кожній точці $t \in [0, T]$, що й потрібно довести. Абстрактна функція $u(t)$ задовольняє також умову (37). Для перевірки цього досить встановити, що координати елемента $g(t) = (B^*)^{-1}u(t)$, $t \in [0, T]$, задовольняють співвідношення (44). При $i = 0$ маємо:

$$\mu_1 g_0(0) - \mu_2 g_0(T) = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} = 1 = \psi_0,$$

$$\mu_1 g_i(0) - \mu_2 g_i(T) = 0 = \psi_i, 2 \leq i \leq n - 1.$$

Візьмемо n -ту координату $g(t)$:

$$\begin{aligned}\mu_1 g_n(0) - \mu_2 g_n(T) &= \mu_1 \frac{\bar{a}_0 \mu_2 T}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)^2} - \\ &- \mu_2 \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)} \left(T + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} \right) = \\ &= \frac{\bar{a}_0 \mu_1 \mu_2 T}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)^2} - \frac{\bar{a}_0 \mu_2^2 T}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)^2} - \frac{\bar{a}_0 \mu_2 T}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)} = \\ &= \frac{\bar{a}_0 \mu_2 T(\mu_1 - \mu_2)}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)^2} - \frac{\bar{a}_0 \mu_2 T}{\bar{a}_n(\mu_1 - \mu_2)} = 0 = \psi_n\end{aligned}$$

і т.д. Звідси випливає співвідношення $\mu_1 \lim_{t \rightarrow +0} u(t) - \mu_2 \lim_{t \rightarrow T-0} u(t) = \psi$, яке справджується в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$. У випадку задачі Коші $\lim_{t \rightarrow +0} u(t) = \delta$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Леонтьев А.Ф. Обобщения рядов экспонент / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1981. – 320 с.
2. Гельфанд И.М. Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. Горбачук В.И. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.
4. Городецкий В.В. Множину початкових значень гладких розв'язків дифференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
5. Городецкий В.В. Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева в пространствах типа S / Городецкий В.В., Мартынюк О.В. // Сиб. мат. журн. – 2013. – 54, № 3. – С. 569–584.
6. Гельфанд И.М. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 8, вып. 6. – С. 3–54.
7. Нагнибіда М.І. Класичні оператори в просторах аналітичних функцій / М.І. Нагнибіда. – К.: Ін-т математики НАН України, 1995. – 297 с.
8. Лінчук С.С. Застосовність дифференціальних операторів нескінченного порядку відносно q -похідної до прострів аналітичних функцій / С.С. Лінчук // IV Міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. – Чернів. нац. унів., 2014. – С. 94–96.