

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ УМОВ ДЛЯ КЛАСУ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ У ПІВПЛОЩИНІ

Нехай $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$ є простір функцій, аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, для яких

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_+} \left\{ |G(z)| e^{-\sigma |\operatorname{Im} z|} \right\} < +\infty.$$

Для даного простору встановлено еквівалентність швидкого спадання по додатній півосі модуля функції $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$ до швидкого зростання її модуля на межі.

Let $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$ be the space of functions analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, for which

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_+} \left\{ |G(z)| e^{-\sigma |\operatorname{Im} z|} \right\} < +\infty.$$

For this space we prove the equivalence of rapid decrease in the positive half-axis of the module of a function $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$ and the rapid growth of its module at the boundary.

Простір обмежених аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій G позначають через $H^\infty(\mathbb{C}_+)$, при цьому він є банаховим відносно норми

$$\|G\| = \sup_{z \in \mathbb{C}_+} |G(z)| < +\infty.$$

Властивості цих просторів детально розглянуті в монографії Дж. Гарнетта [1].

Простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, називається клас аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій G , для яких

$$\sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^p dy \right\} < +\infty.$$

Позначення $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ зумовлено близькістю їх властивостей [2] з властивостями просторів Гарді.

Б. Винницький і В. Шаран в [3] розглянули простір $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, що складається з аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_+} \left\{ |G(z)| e^{-\sigma |\operatorname{Im} z|} \right\} < +\infty.$$

Вони, зокрема, показали, що функції з цих просторів мають майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення $G(it)$ і $G(it)e^{-\sigma |t|} \in$

$L^\infty(\mathbb{R})$. Якщо для функції G існує $c_1 \in \mathbb{R}$, що виконується умова

$$|G(z)| \leq c_1 e^{\sigma |z|}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (1)$$

то легко бачити, що $G(z)e^{-\sigma z} \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$. Тому теж для кожної функції G , що задовольняє умову (1) існують майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення і

$$G(it)e^{-\sigma |t|} \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (2)$$

Функції з даного простору мають [4], [5] сингулярну граничну функцію G , яка з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності визначається рівністю $h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \rightarrow 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln |G(x+it)| dt - \int_{t_1}^{t_2} \ln |G(it)| dt$.

Функція h є незростаючою на $\mathbb{R}$ і $h'(t) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Б. Винницький в [6] розглянув також клас $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, $0 \leq \sigma < +\infty$, функцій G аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |G(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r |\sin \varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

В. Дільний в [7] встановив для випадку $p \in [1; +\infty)$ еквівалентність швидкого спадання по додатній осі модуля функції

$G \in H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ до швидкого зростання її модуля на межі. Такого типу результати використовуються для дослідження циклічності функцій [8].

Метою даної статті є встановлення аналогічного твердження для функцій з $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$.

Теорема Нехай $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$ і $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, а також $h(t) = \text{const}$. Тоді наступні умови еквівалентні:

- а) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt - 2\sigma \ln r \right) > -\infty$;
- б) $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt - 2\sigma \ln r \right) > -\infty$;
- в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln |G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) < +\infty$;
- г) $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln |G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) < +\infty$;
- д) $(\exists c \in \mathbb{R}) : G(z) \exp \left\{ \frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - cz \right\} \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$.

Нам буде потрібне наступне твердження, що випливає з результатів Н. Говорова [9] та формули Карлемана [6], яка в потрібній формі наведена в [3], [10].

Лема 1. Нехай $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv \text{const}$, $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$. Тоді справедливе зображення $G(z) = \exp \left(ia_0 + a_1 z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t, z) \ln |G(it)| dt \right)$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1 \in \mathbb{R}$, де

$$Q(t, z) = \frac{(tz + i)^2}{i(1 + t^2)^2(t + iz)}$$

і виконуються умови

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt > -\infty,$$

$\ln |G(it)| \in L^1[-1; 1]$.

Лема 2. Якщо $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$ і виконується умова б), то виконується умова а).

Доведення. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} & \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln e^{-\sigma|t|} dt \\ &= -2\sigma \ln r + \frac{\sigma}{r^2}(r^2 - 1), \end{aligned}$$

тому умова б) набуде вигляду

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt > -\infty.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}| &= \ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}| \\ &\quad - \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}, \end{aligned} \quad (4)$$

то

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt \\ &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} (\varphi_1(r) - \varphi_2(r)), \end{aligned}$$

де

$$\varphi_1(r) = \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt$$

і

$$\varphi_2(r) = \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|} dt.$$

Тоді умова б) запишеться у вигляді

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} (\varphi_1(r) - \varphi_2(r)) > -\infty. \quad (5)$$

Врахувавши, що $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^\infty(\mathbb{R})$, отримаємо

$$\varphi_1(r) \leq c_2 \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dt < c_3 < +\infty.$$

Припустимо, що $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_2(r) = -\infty$,

(3) тоді існує така послідовність (r_k) , що $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_2(r_k) = +\infty$. Проте функція φ_2 є неспадною, тому для кожної зростаючої послідовності (n_k) , такої, що $n_k \rightarrow +\infty$, при

$k \rightarrow \infty$, маємо $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_2(n_k) = +\infty$. Але $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_1(n_k) < +\infty$, тоді $\lim_{r \rightarrow +\infty} (\varphi_1(r) - \varphi_2(r)) = -\infty$, що суперечить умові (5). Отже, виконується умова а). $\square$

Лема 3. Якщо $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv \text{const}$, $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, а також виконується умова в), то виконується умова б).

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $G(z) \neq 0$ і не виконується умова б), тобто

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt - 2\sigma \ln r \right) = -\infty. \quad (6)$$

Оскільки

$$\operatorname{Re} Q(t; x) = \frac{2t^2x + x - t^2x^3}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)},$$

то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \operatorname{Re} Q(t; x) dt = \frac{x}{\pi} - \frac{2x}{\pi} \ln x, \quad x > 0.$$

Тоді

$$\ln e^{\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x} = \left(\frac{\sigma}{\pi} x - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} Q(t, x) \sigma |t| dt \right).$$

Тому за лемою 1

$$\frac{\ln |G(x) e^{\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x}|}{x} = c_4 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t^2x^2 + 1 + 2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \times \ln |G(it) e^{-\sigma|t|}| dt.$$

З умови (4) отримаємо

$$\frac{\ln |G(x) e^{\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x}|}{x} = c_4 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \times \ln^+ |G(it) e^{-\sigma|t|}| dt +$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \ln^+ |G(it) e^{-\sigma|t|}| dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \ln^+ \frac{1}{|G(it) e^{-\sigma|t|}|} dt - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \ln^+ \frac{1}{|G(it) e^{-\sigma|t|}|} dt = \\ & = c_4 - K_1(x) + K_2(x) + K_3(x) - K_4(x). \end{aligned}$$

Оцінимо $K_1(x)$. З умови (1) випливає, що $|G(it)| \leq c_1 e^{\sigma|t|}$, тому $|G(it)| e^{-\sigma|t|} \leq c_1$. Отже,

$$\begin{aligned} K_1(x) & \leq \frac{c_5 x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} dt = \\ & = \frac{c_5 x^2}{2(1+x)^2} \leq c_6, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Оцінимо K_4 :

$$\begin{aligned} K_4(x) & \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \\ & \times \ln^+ \frac{1}{|G(it) e^{-\sigma|t|}|} dt = \\ & = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(t^2+x^2)} \ln^+ \frac{1}{|G(it) e^{-\sigma|t|}|} dt. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок $x > 1$, тоді

$$K_4(x) \leq \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it) e^{-\sigma|t|}|} dt.$$

Використавши нерівність $\ln^+ \frac{1}{ab} \leq \ln^+ \frac{1}{a} + \ln^+ \frac{1}{b}$, отримаємо

$$\begin{aligned} K_4(x) & \leq \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \\ & \times \left(\ln^+ \frac{1}{|G(it)|} + \ln^+ \frac{1}{e^{-\sigma|t|}} \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \sigma|t| dt = \\
&= c_7 + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \int_{|t| \geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq \\
&\leq c_7 + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \int_{|t| \geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt.
\end{aligned}$$

За лемою 1 $\ln |G(it)| \in L^1[-1; 1]$, тому

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} |\ln |G(it)|| dt \leq c_8.$$

Звідси

$$K_4(x) \leq c_9 + \frac{2}{\pi} \int_{|t| \geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \\
&\leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} d \int_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds.
\end{aligned}$$

Проінтегрувавши за частинами, отримаємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{t^2} \int_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds \Big|_1^{+\infty} \\
&\quad + 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} \int_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds dt. \quad (7)
\end{aligned}$$

Застосувавши нерівність $\frac{1}{t^2} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4r^2} \right)$, якщо $|t| \leq |r|$ одержимо

$$\begin{aligned}
&\int_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds \\
&\leq \frac{4}{3} \int_1^{2t} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2t^2} \right) \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds.
\end{aligned}$$

За лемою 1 виконується умова (3), тобто

$$\int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt > -c_{10},$$

для деякої сталої $c_{10} \in \mathbb{R}$. Тоді $\int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\ln^+ |G(it)| - \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} \right) dt > -c_{10}$. Звідси отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt < \\
&< c_{10} + \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ |G(it)| dt \leq \\
&\leq c_{10} + \int_{1 < |t| \leq r} \frac{1}{t^2} \ln^+ |G(it)| \leq c_{11} + c_{12} \ln r.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\int_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds \leq c_{11} + c_{12} \ln t.$$

Підставивши останню оцінку в нерівність (7), отримаємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq c_{13}.$$

Аналогічно

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq c_{13},$$

тому $K_4(x) \leq c_{14}$, якщо $x \geq 1$.

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} K_3(x) &\geq \frac{1}{\pi} \int_{1 < |t| \leq x} \frac{t^2 x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \\ &\quad \times \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}} dt \geq \\ &\geq \frac{1}{8\pi} \int_{1 < |t| \leq x} \frac{1}{t^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}} dt \geq \\ &\geq -\frac{1}{8\pi} \int_{1 < |t| \leq x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right) \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt. \end{aligned}$$

Тому за умовою (6) маємо, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} K_3(x) = +\infty$. Оскільки $K_2(x) > 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x \ln x}|}{x} = +\infty.$$

А це суперечить умові в) $\square$

Лема 4. Якщо $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv \text{const}$ і виконується умова д), то виконується й умова з).

Доведення. Оскільки виконується умова д), то з означення простору $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ маємо:

$$\left| G(z) \exp \left\{ \frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - cz \right\} \right| \leq c_{15}.$$

Звідси

$$\ln |G(x)| + \frac{2\sigma}{\pi} x \ln x \leq c_{15}x.$$

Оскільки,

$$\frac{\ln |G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \leq c_{15},$$

то виконується умова г) $\square$

Лема 5. Якщо $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv \text{const}$, $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, і виконується умова а), то виконується умова д).

Доведення. З умови леми маємо, що виконується умова а), тому

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall r > 1):$$

$$\int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt > c.$$

Оскільки $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, то виконується умова (2). Тому

$$\begin{aligned} &\int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt \leq \\ &\leq \ln c_{16} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dt \leq c_{17}. \end{aligned}$$

Врахувавши, що за лемою 1 $\ln |G(it)| \in L^1[-1; 1]$ і $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, отримаємо

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |G(it)e^{-\sigma|t|}|}{1+t^2} dt = \\ &= c_{18} + \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_{1 < |t| \leq r} \frac{\ln |G(it)e^{-\sigma|t|}|}{1+t^2} dt \leq \\ &\leq c_{18} + \frac{4}{3} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2r^2} \right) \\ &\quad \times \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt < +\infty. \end{aligned}$$

Тоді з [1, с. 81-82], [11, с.25] і [12, с. 189-190], оскільки $G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z \ln z}$ не має нулів в $\mathbb{C}_+$ і її сингулярна гранична функція є тотожною сталою, отримаємо, що виконується д). $\square$

Доведення теореми впливає з лем 2-5 і тривіальної імплікації умов в) і г). Теорема залишається справедливою і для функцій, що задовольняють умову (1).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984 р. – 470 с.
2. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . – М.: Наука, 1984. – 368 с.

-
3. *Vynnytsyi B., Sharan V.* On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane // *Matematychni Studii* – 2000. – **14**, N1. – С. 41–48.
 4. *Винницький Б. В., Дільний В. М.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // *Матем. студії* – 2001. – **16**, N1. – С. 61–70.
 5. *Fedorov M. A., Grishin A. F.* Some questions of the Nevanlinna theory for the Complex Half-Plane // *Math. Physics, Anal. and Geom.* –1998. – **1**, N3. – С. 223–271.
 6. *Винницький Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // *Укр. мат. журн.* – 1994. – **46**, N5. – С. 484 – 500.
 7. *Дільний В. М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді // *Укр. мат. журн.* –2006. – **58**, N9. –С. 1257–1263.
 8. *Dilnyi V.* On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces // *Journ. of Math. Phys., Anal. Geom.* – 2011. – **7**, N 1. – С. 19-33.
 9. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. –М.:Наука, 1986. –240с.
 10. *Винницький Б. В., Дільний В. М.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // *Матем. студії* – 2001. – **16**, № 1. –С. 61–70.
 11. *Duren O.* Theory of H^p space. – N. Y., 1970.– 251pp.
 12. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. –М.: ИЛ., 1963. –306 с.