DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.10

Працьовитий М.В., Назарчук В.В., Василенко Н.А.

ОДНОПАРАМЕТРИЧНА СІМ'Я ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНИХ З Q_S-ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

У статті досліджується один континуальний клас функцій, означених у термінах Q_s-зображення чисел відрізка $[0;1]$, що є узагальненням класичного s-кового зображення. Залежність n-ої цифри Q_s-зображення значення функції визначається фінітною функцією $\varphi_n(a_n, \alpha_n)$ двох змінних, аргументами якої є відповідні Q_s-цифри $\alpha_n(x)$ і $a_n(a)$ аргумента x та параметра a.

Доведено неперервність кожної з функцій цього класу по множині Q_s-унарних чисел (чисел, що мають єдине Q_s-зображення). Знайдено необхідні і достатні умови неперервності функції по всій області визначення. Вказано умови, визначені цифрами параметра a та послідовності функцій (φ_n), за яких функція f_a матиме скінченні та континуальні множини рівні. Для часткових випадків ($s = 2$) вивчено інтегральні, диференціальні властивості функцій та фрактальні властивості їх множин значень; на основі автомодельних властивостей графіка функції і встановленого взаємозв'язку між розглядуваною функцією та інверсором цифр Q_2-зображення чисел, обчислено значення інтеграл Лебега; виділено підклас функцій, що є кусково-сингулярними або сингулярними на проміжках (тобто неперервними на проміжках функціями, відміними від константи, похідна яких рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

Ключові слова і фрази: Q_s-зображення чисел, Q_s-бінарне число, Q_s-унарне число, циліндр, множина канторівського типу, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, фрактальна функція, сингулярна функція, інверсор Q_2-зображення чисел.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *prats4444@gmail.com, nazarchukvalentyna@imath.kiev.ua, vasylenkonnn@gmail.com*

Вступ

Функції з фрактальними властивостями – популярний об'єкт сучасних наукових досліджень [1, 2, 6, 7, 4, 3]. Вони проявляють себе у різних галузях математики [1]. Існує методологічна проблема наявності ефективного інструментарію задання та аналітичного вивчення фрактальних функцій. Одним з засобів розвитку теорії таких функцій є різні системи зображення дійсних чисел, що ґрунтуються на розвиненні числа в ряд спеціального виду [11]. Різні

УДК 511.7+517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A21, 26A30.
This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, P.M., N.V.)

системи зображення чисел для задання та дослідження структурних, тополого-метричних, диференціальних та фрактальних властивостей функцій були використанні у роботах [5, 8, 9, 10].

Нехай $2 \leq s$ – фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, ..., s-1\}$ – s-символьний алфавіт. Ми цікавимося одним континуальним класом функцій, визначених в термінах Q_s-зображення дійсних чисел, що є узагальненням класичного s-кового зображення. При цьому цифри Q_s-зображення значення функції залежать від відповідних цифр Q_s-зображення аргумента та параметра. Кожна з функцій визначається наперед заданою послідовністю фінітних функцій $\varphi : A_s \times A_s \to A_s$. Більшість функцій мають фрактальні властивості, принаймні фрактальними є або множина значень, або множина рівня, або графік.

Інтерес до класу таких функцій пов'язаний зі спробою його структуризації за принципом наявності фрактальних властивостей у множин різного роду особливостей функції, а також з тим, що теоретичний аналіз властивостей функцій, залежних від параметра, є пропедевтикою до вивчення фрактальних функцій двох змінних.

1 Об'єкт дослідження

Нехай $L_s = A_s \times A_s \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту; Φ – сім'я фінітних функцій $\varphi(u, v)$ двох змінних, визначених на множині всеможливих пар елементів алфавіту, яка набуває значень з множини A_s, тобто $\varphi_n : A_s \times A_s \to A_s$. Очевидно, що клас функцій Φ містить s^3 різних функцій φ. Серед них s^2 пар двоїстих функцій φ_n і $\widetilde{\varphi}_n$, тобто таких, що $\varphi_n(u, v) = s - 1 - \widetilde{\varphi}_n(u, v)$.

Нехай $(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ — стохастичний вектор, такий що $0 < q_i < 1$, $i \in A_s$. Відомо [11], що для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_s$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}, \tag{1}$$

де $\beta_{\alpha_n} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_n - 1} q_i$ (тобто $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1, ..., \beta_{s-1} = 1 - q_{s-1}$). Розклад числа x в ряд (1) називається *Q_s-представленням* цього числа, а скорочений запис $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}$ — його *Q_s-зображенням.*

Якщо $q_i = \frac{1}{s}$ для будь-якого $i \in A_s$, то Q_s-зображення є класичним s-ковим зображенням.

Існують числа, що мають два Q_s-зображення. Це числа, які мають зображення

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{m-1} \alpha_m (0)} = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{m-1} [\alpha_m - 1](s-1)}. \tag{2}$$

Вони називаються *Q_s-бінарними.* Множина таких чисел є зліченною. Решта чисел одиничного відрізка мають єдине зображення. Вони називаються *Q_s-унарними.*

Означення 1. *Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 ... c_m$ називається множина*

$$\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m} = \{x = \Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m \alpha_1 \alpha_2 ...}, (\alpha_n) \in L_s\}.$$

$\forall (c_1, ..., c_m)$ і $\forall m \in N$ циліндри Q_s-зображення мають властивості:

1) $\Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^{Q_s}_{c_1 c_2 ... c_m i}$;

2) $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m} = \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{c_i} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{c_j}; \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{c_i} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{c_j} + \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i}\right]$;

3) $|\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i} = q_{c_m}|\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}}|$;

4) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = x$.

Нехай $a = \Delta^{Q_s}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ – параметр (фіксоване число). Розглядається функція f_a, означена рівністю

$$f_a(x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\varphi_1(a_1,\alpha_1)\varphi_2(a_2,\alpha_2)\ldots\varphi_n(a_n,\alpha_n)\ldots}. \tag{3}$$

Означення функції f_a, взагалі кажучи, є некоректним, оскільки для різних зображень Q_s-бінарного числа має місце нерівність $f_a(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}) \neq f_a(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](s-1)})$. Тому домовимось використовувати лише одне із зображень, а саме те, що містить період (0), за виключенням деяких випадків.

Розглянемо приклади функцій, породжених сталими послідовностями (φ_n).

Якщо $\varphi_n(u,v) = v$, то $f_1 \equiv f_a(x) = x$; якщо $\varphi_n(u,v) = u$, то $f_2 \equiv f_a(x) = a$; якщо $a = \Delta^{Q_s}_{(0)}$, $\varphi_n(u,v) = s-1-u$, то $f_3 \equiv f_a(x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{|s-1-\alpha_1||s-1-\alpha_2|\ldots|s-1-\alpha_n|\ldots}$ – інверсор цифр Q_s-зображення чисел. Функції φ_n функцій f_1 і f_2 є двоїстими, тому множини значень, множин рівнів, їхні графіки мають деякі властивості "симетрії", але диференціальні властивості функцій f_1 і f_2 принципово різні. Окрема увага подібним класам функцій присвячена в роботах [6, 7]. Якщо $\varphi_n(u,v) = |u-v|$ для будь-якого $n \in N$, то ми отримаємо клас функцій, що вивчався в роботі [4].

2 Властивості функцій f_a

Теорема 1. *Для будь-якої послідовності функцій (φ_n) і будь-якого значення параметра a функція f_a є неперервною по всій множині Q_s-унарних чисел, і неперервною по всій області визначення тоді і лише тоді, коли для будь-якого $n \in N$, $i \in A_s$ виконується одна з рівностей*

$$\varphi_n(a_n,i) = \varphi_n(a_n, s-1-i) \text{ або } \varphi_n(a_n,i) = s-1-\varphi_n(a_n,s-1-i). \tag{4}$$

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – довільна Q_s-унарна точка і $f_a(x_0) = \Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_n\ldots}$, де $b_n = \varphi_n(a_n,\alpha_n)$. Розглянемо точку $x \neq x_0$, тоді існує такий номер n, що $\alpha_n(x) \neq \alpha_n(x_0)$, але $\alpha_j(x) = \alpha_j(x_0)$ для усіх $j < n$. Умова $n \to \infty$ рівносильна $x \to x_0$. Для обґрунтування неперервності функції f_a в точці x_0 покажемо, що

$$\lim_{x\to x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| = 0.$$

Оскільки

$$\lim_{x\to x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| = \lim_{n\to\infty} |\Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_{n-1}b'_n\ldots} - \Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_{n-1}b_n\ldots}| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n-1} q_{b_i}\right)|\Delta^{Q_s}_{b'_nb'_{n+1}\ldots} - \Delta^{Q_s}_{b_nb_{n+1}\ldots}| \leq \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n-1} q_{b_i}\cdot 1 = 0,$$

то $\lim\limits_{x\to x_0} f_a(x) = f_a(x_0)$, а отже, функція f_a неперервна по множині Q_s-унарних чисел.

Нехай $x_0 = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](s-1)}$ – Q_s-бінарне число.

Доведення необхідної і достатньої умови другої частини теореми проведемо окремо.

Необхідність. Якщо функція f_a неперервна в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f_a(x) = f_a(x_0)$, то вона неперервна зліва і справа в цій точці. Розглянемо послідовність (x_k), де

$$x_k = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\underbrace{[s-1]\ldots[s-1]}_{k}(0)}.$$

Очевидно, що $x_k \to x_0 - 0$, коли $k \to \infty$. Тоді

$$\lim_{k\to\infty} f_a(x_k) = f_a(x_0) = f_a(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(s-1)}).$$

Тепер розглянемо послідовність (x'_k), де

$$x'_k = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1]\underbrace{0\ldots0}_{k}[s-1](0)}.$$

Очевидно, що $x'_k \to x_0 + 0$, коли $k \to \infty$. Тоді

$$\lim_{k\to\infty} f_a(x'_k) = f_a(x_0) = f_a(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](0)}).$$

Отже, мають місце рівності:

$$f_a(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(s-1)}) = f_a(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](0)}) \ \ \forall n \in N,$$

тобто $\forall n \in N, i \in N$

$$\Delta^{Q_s}_{\varphi_1(a_1,\alpha_1)\ldots\varphi_n(a_n,\alpha_n)(\varphi_{n+i}(a_{n+i},s-1))} = \Delta^{Q_s}_{\varphi_1(a_1,\alpha_1)\ldots\varphi(a_n,[\alpha_n-1])(\varphi_{n+i}(a_{n+i},0))}.$$

В силу довільності n і α_n дана рівність виконується лише умови виконання для будь-якого $n \in N$ однієї з рівностей (4) (тобто відповідні цифри образу Q_s-бінарних точок збігаються або переходять у "протилежні" в межах алфавіту).

Достатність. Якщо виконується для будь-якого $n \in N$ одна з рівностей умови (4), тоді очевидно, що

$$f_a(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(s-1)}) = f_a(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](0)}).$$

Розглянемо число $x < x_0$, близьке до x_0, тобто

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\underbrace{s-1\ldots s-1}_{k}\alpha_{k+n+1}\ldots} \to x_0 = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(s-1)}, \ k \to \infty.$$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0} |f_a(x) - f_a(x_0)| = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} q_{\alpha_i} |f_a(\Delta^{Q_s}_{\underbrace{s-1\ldots s-1}_{k}\alpha_{k+n+1}\ldots}) - f_a(\Delta^{Q_s}_{(s-1)})| = 0.$$

Аналогічними міркування можна показати, що правостороння границя існує і збігається з $f(x_0)$. Теорему доведено. □

Зауваження 1. *Рівності* (4) *можуть виконуватись як за рахунок функцій* φ_n*, так і за рахунок цифр параметра* a_n*. Наприклад, функція* $\varphi_n(u,v) = |u - v|$ *для довільних пар* $(u,v) \in A_s \times A_s$ *не задовольняє рівності* (4)*, але якщо* $a_n = s - 1$ *для будь-якого* $n \in N$*, в цьому випадку* f_a *буде неперервна.*

Наслідок 1. *Для будь-якого значення параметра a з одиничного відрізка існує послідовність функції (φ_n) така, що f_a неперервна функція.*

Зауваження 2. *Неперервні функції f_a утворюють континуальну множину, зокрема для будь-якого $c \in [0;1]$ існують такий параметр a і послідовність функцій (φ_n), що $f_a(x) = c = const$.*

Наслідок 2. *Кожна неперервна функція f_a є монотонною (лінійною або сингулярною) функції.*

Дослідимо властивості множин рівнів. Нагадаємо, що *множиною рівня* $y_0 \in D_{f_a}$ називається множина всіх його прообразів, тобто множина виду:

$$f_a^{-1}(y_0) = \{x : f_a(x) = y_0\}.$$

Теорема 2. *Нехай не існує такого номера m, що $\varphi_{m+i}(u,v) = const$ для будь-якого $i \in N$. Якщо для нескінченної кількості n мають місце нерівності*

$$\varphi_n(a_n, i) \neq \varphi_n(a_n, s-1-i) \;\; i \;\; \varphi_n(a_n, i) \neq s-1-\varphi_n(a_n, s-1-i), \tag{5}$$

то функція f_a має як скінченні, так і континуальні множини рівнів; якщо нерівності (5) *виконуються лише для скінченної кількості n, то функція f_a має лише скінченні рівні.*

Доведення. Нехай умови (5) виконуються на скінченній кількості місць $n_1, n_2, ..., n_k$, причому n_k – порядковий номер функції φ, для якої мають місце умови (5), тоді функція f_a згідно з попередньою теоремою є неперервною на кожному циліндрі (n_k+1)-ого рангу. Оскільки не існує такого номера m, що $\varphi_{m+i}(u,v) = const$ для будь-якого $i \in N$, то на кожному циліндрів (n_k+1)-го рангу функція є монотонно спадною або зростаючою. Тому в такому випадку функція f_a має лише скінченні рівні.

Якщо умови (5) виконуються для нескінченної кількості n, то встановивши бієкцію між двійковим зображенням числа з одиничного відрізка і фактом виконання або не виконання умов (5), отримаємо континуальну множину точок розриву функції f_a. А тому множини рівнів функції f_a можуть бути як континуальні, так і скінченні. □

Зауваження 3. *Якщо існує такий номер m, що $\varphi_{m+i}(u,v) = const$ для будь-якого $i \in N$, то очевидно, що усі множини рівнів є або порожні множини або континуальні.*

3 Деякі часткові випадки

Зауваження 4. *Якщо $s = 2$, $\varphi_n(u,v) = 1 - v$ для $n \in N$, то функція $f_a(x)$ є інверсором цифр Q_2-зображення чисел:*

$$f_a(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = I(x) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]...[1-\alpha_n]...},$$

яка, як відомо [11], є строго спадною сингулярною функцією (неперервною, відмінною від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

Лема 1. *Нехай $s = 2$. Якщо, починаючи з деякого номера t, усі функції $\varphi_{t+n}(u,v) = 1 - v$ для будь-якого $n \in N$, то функція $f_a(x)$ є кусково-сингулярною, а саме сингулярною на кожному циліндрі рангу t.*

Доведення. Легко показати, що незалежно від набору $(a_1, ..., a_t)$ і функцій $\varphi_1, ..., \varphi_t$ функція f_a буде неперервною на кожному циліндрі рангу t, оскільки

$$f_a(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \beta_{\varphi_1(a_1,\alpha_1)} + \sum_{i=2}^{t} \beta_{\varphi_i(a_i,\alpha_i)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\varphi_j(a_j,\alpha_j)} + \prod_{i=1}^{t} q_{\varphi_i(a_i,\alpha_i)} I(\Delta^{Q_2}_{\alpha_{t+1}\alpha_{t+2}...}). \qquad \square$$

Зауваження 5. *За виконанні умов теореми графік функції на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1...\alpha_t}$ афінно-еквівалетний графіку інверсора цифр, тобто графік інверсора переходить в графік функції f_a на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1...\alpha_t}$ під дією афінного перетворення:*

$$\begin{cases} x' = \prod\limits_{i=1}^{t} q_{\alpha_i} x + \Delta^{Q_2}_{\alpha_1...\alpha_t(0)}, \\ y = (f_a(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1...\alpha_t(0)}) - f_a(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1...\alpha_t(1)}))y + 1 - f_a(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1...\alpha_t(1)}). \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 3. *Нехай $s = 2$ і $\varphi_k(u, v) = |u - v|$ $\forall k \in N$. Якщо починаючи з деякого номера $t \in N$, усі цифри $a_{t+n} = 1$, $n \in N$, тобто $a = \Delta^{Q_2}_{a_1a_2...a_t(1)}$, то має місце рівність:*

$$\int_0^1 f_a(x)dx = \sum_{(\alpha_1,...,\alpha_t)\in A_2^t} \left[q_{\alpha_1}...q_{\alpha_t} \left(f_a(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1...\alpha_t(0)}) + 1 - \frac{2q_0^2 + q_1^2}{1 - 2q_0q_1} f_a(\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t(1)}) \right) \right]. \tag{7}$$

Доведення. Згідно з адитивної властивості інтеграла запишемо рівність

$$\int_0^1 f_a(x)dx = \sum_{(a_1,...,a_t)\in A_2^t} \int_{\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t}} f_a(x)dx,$$

тоді враховуючи афінні перетворення (6) маємо:

$$\int_{\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t}} f_a(x)dx = q_{\alpha_1}...q_{\alpha_t}(f_a(\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t(0)}) - f_a(\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t(1)})) \int_0^1 I(x)dx + q_{\alpha_1}...q_{\alpha_t}(1 - f_a(\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t(1)})).$$

Як відомо, [11]

$$\int_0^1 I(x)dx = \frac{q_0^2}{1 - 2q_0q_1}.$$

Тоді

$$\int_{\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t}} f_a(x)dx = q_{\alpha_1}...q_{\alpha_t} \left[(f_a(\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t(0)} - f_a(\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t(1)})) \frac{q_0^2}{1 - 2q_0q_1} + 1 - f_a(\Delta^{Q_2}_{a_1...a_t(1)}) \right].$$

В результаті спрощення отримаємо вираз (7). $\square$

Теорема 4. *Нехай $s = 2$ і $\varphi_n(u, v) = uv$ $\forall n \in N$, тоді*

1) *якщо в Q_2-зображенні параметра a скінченна кількість одиниць, то множина значень функції f_a є скінченною;*

2) *якщо кількість нулів серед цифр Q_2-зображення числа a скінченна, то множина значень функції f_a є об'єднанням відрізків;*

3) в решті випадків множиною значень функції $f_a(x)$ є множиною канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега) з дробовою фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.

Доведення. Нехай Q_2-зображення числа a має вигляд $a = \Delta^{Q_2}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ і

$$y = f_a(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots}.$$

1) Нехай серед цифр a_n лише скінченна кількість 1, тобто $a_{n_1} = a_{n_2} = \ldots = a_{n_k} = 1$. Тоді $\beta_{n_i} = \varphi_{n_i}(1, \alpha_{n_i}) = \alpha_{n_i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, а $\beta_n = 0$ для усіх решта $n \in N \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Тоді очевидно, що множиною значень функції f_a є множина точок виду

$$\Delta^{Q_2}_{0 \ldots 0 \alpha_{n_1} 0 \ldots 0 \alpha_{n_2} 0 \ldots 0 \alpha_{n_k} (0)} \text{ або } \Delta^{Q_2}_{\alpha_{n_1} 0 \ldots 0 \alpha_{n_2} 0 \ldots 0 \alpha_{n_k} (0)}.$$

Оскільки номерів n_i скінченна кількість, то відповідно і множина значень є скінченною.

2) Нехай серед цифр a_n лише скінченна кількість 0, тобто $a_{n_1} = a_{n_2} = \ldots = a_{n_k} = 0$. Тоді згідно з попередніми міркуваннями множиною значень функції f_a буде множина точок виду $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n_1 - 1} 0 \alpha_{n_1 + 1} \ldots \alpha_{n_2 - 1} 0 \alpha_{n_2 + 1} \ldots \alpha_{n_k - 1} 0 \alpha_{n_k + 1} \ldots}$. Оскільки місць номерів фіксованих цифр скінченна, то множина значень є об'єднанням відрізків.

3) Нехай серед цифр a_n є нескінченна кількість нулів та одиниць, тобто серед цифр β_n нескінченна кількість одиниць, тоді множиною значень функції є множина

$$C[Q_2, V] = \{x : \ x = \Delta^{Q_2}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots}, \beta_n = 1, n \in V \subset N\},$$

де V – множина місць для яких $\beta_n = 1$. Як відомо [11], дана множина є досконалою множиною нульової міри Лебега з дробовою розмірністю Гаусдорфа-Безиковича. □

Список літератури

[1] Y. Chen, Fractal Texture and Structure of Central Place Systems, Fractals 28(01) (2020) 2050008

[2] Jarnicki M., Pflug. P. Continuous nowhere differentiable functions. The monsters of analysis. Springer Monographs in Mathematics, 2015, doi:https://doi.org/10.1007/978-3-319-12670-8

[3] Massopust P. *Fractal Functions, fractal surfaces, and Wavelets.* Academic press, inc. 1994.

[4] Nazarchuk V.V., Vaskevych S.O., Ratushniak S.P. *One continuum class of fractal functions defined in terms of Q_s^*-representation*, Bukovinian Math. Journal. 12, 2 (2024), 154–161. doi:https://doi.org/10.31861/bmj2024.02.14

[5] Panasenko O.B. *Fractal dimension of graphs of continuous cantor projectors.* Nauk. Chas. Nats. Ped. Univ. im. Drahomanova, Ser. Fiz.-Mat. Nauk 2008, **9**, 104–111. (in Ukrainian).

[6] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dmytrenko S.O., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. *About one class of function with fractal properties* // Bukovynian Mathematical Journal. 2021, T. 6 ,№ 1 — P.273–283. https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.23 (in Ukrainian)

[7] Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S. P. *Structural and self-similar properties of representations of one class of fractal functions and distributions of their values* / Voronoi's Impact on Modern Science. Proceeding of the Sixth Inter. Conf. on Analytic Number Theory and Spatial Tessellatins. 2025. Vol. 2. pp.199-207.

[8] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. *Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation* // International Journal of Math. Analysis, Vol.7, 2013. no. 61-67. – P.3155–3169.

[9] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliah N.V., Ratushniak S.P. *Inversor of digits of Q_2^*-representative*, Mat. Stud. 55 (2021), P.37–43. doi: https://doi.org/10.30970/ms.55.1.37-43

[10] Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P., Klymchuk S.O. *Level sets of asymptotic mean of digits function for 4-adic representation of real numbers.* Methods Funct. Anal. Topology. 2016, **22** (2), 184–196.

[11] Pratsiovytyi M.V. Two-symbol systems of encoding of real numbers and their applications. Naukova Dumka, Kyiv (2022). (in Ukrainian)

Надійшло 27.11.2025

Pratsiovytyi M.V., Nazarchuk V.V., Vasylenko N.A. *A one-parameter family of fractal functions related with the Q_s-representation of real numbers*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 88–95.

In the paper we consider a continuum class functions defined by terms of the Q_s-representation of real numbers on the segment $[0;1]$, which generalizes the classical s-adic representation. The dependence of the n-th digit of the Q_s-representation of the function value is specified by a finite function $\varphi_n(a_n, \alpha_n)$ of two variables, whose arguments are the corresponding Q_s-digits $\alpha_n(x)$ and $a_n(a)$ of the input x and the parameter a, respectively.

We prove continuity of each function in this class at every Q_s-unary number, i.e., at points possessing a unique Q_s-representation. Necessary and sufficient conditions for continuity on the entire domain are established. Conditions involving the digits of the parameter a and the sequence of defining functions (φ_n), under which the function f_a admits finite or continuum cardinality level sets are obtained.

For particular cases ($s = 2$), we study integral and differential properties, as well as the fractal properties of the sets of values. Using the self-similarity properties of the function graph and the established connection between the functions under consideration and the inversor of digits of the Q_2-representation of numbers, we compute the Lebesgue integral of these functions. Furthermore, we identify a subclass of functions that are piecewise singular or singular on intervals; that is, continuous non-constant functions whose derivative is zero almost everywhere in the sense of Lebesgue measure.