УДК 517.929

©2007 р. І.І.Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Розглядається система нелінійних різницевих рівнянь. Доведено існування інтегральних многовидів та принцип зведення для дослідження стійкості. Стійкість тривіального розв'язку системи еквівалентна стійкості триваільного розв'язку деякої системи різницевих рівнянь на многовиді.

We consider a system of nonlinear difference equations and prove the existence of integral manifolds. We prove the reduction principle for investigation of stability. The stability of the trivial solution of a system is equivalent to the stability of the trivial solution of some system of difference equations on a manifold.

Для звичайних диференціальних рівнянь питання існування і стійкості інтегральних множин у критичному випадку розглядалися, зокрема, у працях [1 – 3], а для різницевих рівнянь – в [4 – 7]. У цій статті досліджується стійкість тривіального розв'язку нелінійної системи різницевих рівнянь у критичному випадку.

Розглянемо систему різницевих рівнянь

$$y_{n+1} = A_n y_n + f_n(y_n, z_n),$$
$$z_{n+1} = B_n z_n + g_n(y_n, z_n), \qquad (1)$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $y_n \in \mathbb{R}^\nu$, $z_n \in \mathbb{R}^{m-\nu}$, A_n – послідовність матриць розмірності $\nu \times \nu$, B_n – послідовність матриць розмірності $(m-\nu)\times(m-\nu)$, функції f_n та g_n задовольняють умови

$$f_n(0,0) = g_n(0,0) = 0,$$
$$\|f_n(y,z) - f_n(\overline{y},\overline{z})\| \le L(\|y-\overline{y}\| + \|z-\overline{z}\|), \qquad (2)$$
$$\|g_n(y,z) - g_n(\overline{y},\overline{z})\| \le L(\|y-\overline{y}\| + \|z-\overline{z}\|)$$

при всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\{y,\overline{y}\} \subset \mathbb{R}^\nu$, $\{z,\overline{z}\} \subset \mathbb{R}^{m-\nu}$.

Поряд із системою (1) розглянемо лінійні системи

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad z_{n+1} = B_n z_n. \qquad (3)$$

Нехай матриці B_n невироджені при всіх $n \in \mathbb{Z}$. Позначимо через $G_+(n,s)$ та $G_-(n,s)$ фундаментальні матриці розв'язків систем (3), такі, що $G_+(s,s) = E$, $G_-(s,s) = E$, де E – одиничні матриці відповідних розмірностей. Нехай виконуються нерівності

$$\|G_+(n,s)\| \le K\rho^{n-s}, \quad n \ge s, \qquad (4)$$
$$\|G_-(n,s)\| \le K\gamma^{n-s}, \quad n \le s, \qquad (5)$$

де $0 < \rho < \gamma \le 1$, $K \ge 1$.

Позначимо чрез $x_n = \begin{pmatrix} y_n & z_n \end{pmatrix}^T$ розв'язок системи (1) і визначимо норму $\|x_n\| = \|y_n\| + \|z_n\|$, $x_n \in \mathbb{R}^m$. Також будемо позначати через $x_n(n_0, x_{n_0})$ розв'язок системи (1) з початковими даними $n = n_0$, $x_n = x_{n_0}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (2), (4), (5). Тоді при*

$$L < \frac{\gamma - \rho}{8K^2} \qquad (6)$$

існує послідовність поверхонь

$$S^+ = \{(y,z) \,\Big|\, z = h_n(y), n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}^\nu, z \in \mathbb{R}^{m-\nu}\}, \qquad (7)$$

які задовольняють умови $h_n(0) = 0$, $\|h_n(y) - h_n(\overline{y})\| \le \frac{1}{2}\|y-\overline{y}\|$ *і для розв'язку системи (1) з початковими даними* y_{n_0}, z_{n_0}, n_0, *які задовольняють рівняння (7), виконується нерівність*

$$\|x_n\| \le 2K\|y_{n_0}\|\mu^{n-n_0},$$

де $n \geq n_0$, $\mu = (\rho+\gamma)/2$.

Доведення. Поряд із системою (1) розглянемо систему різницевих рівнянь

$$y_n = G_+(n,n_0)c + \sum_{s=n_0}^{n-1} G_+(n,s+1)f_s(y_s,z_s), \tag{8}$$

$$z_n = -\sum_{s=n}^{\infty} G_-(n,s+1)g_s(y_s,z_s),$$

де c – сталий ν-вимірний вектор.

Систему (8) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. Наближення визначимо за допомогою таких формул:

$$x_n^{(0)} = \begin{pmatrix} y_n^{(0)} \\ z_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad x_n^{(k)} = \begin{pmatrix} y_n^{(k)} \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$y_n^{(k)} = G_+(n,n_0)c +$$

$$+ \sum_{s=n_0}^{n-1} G_+(n,s+1)f_s(y_s^{(k-1)}, z_s^{(k-1)}),$$

$$z_n^{(k)} = -\sum_{s=n}^{\infty} G_-(n,s+1)g_s(y_s^{(k-1)}, z_s^{(k-1)}),$$

$$k = 1,2,\ldots \tag{9}$$

Покажемо, що при будь-якому c всі послідовні наближення визначені і задовольняють оцінки

$$\|x_n^{(k)}\| \leq 2K\|c\|\mu^{n-n_0}, \quad n \geq n_0. \tag{10}$$

Оцінку (10) встановимо індукцією. Нульове наближення, очевидно, задовольняє цю оцінку. Нехай $(k-1)$-е наближення задовольняє (10). Тоді із формул (9) і умов теореми випливає

$$\|y_n^{(k)}\| \leq K\|c\|\rho^{n-n_0} + \sum_{n=n_0} 2K^2L\|c\|\rho^{n-s-1}\mu^{s-n_0},$$

$$\|z_n^{(k)}\| \leq \sum_{s=n}^{\infty} 2K^2L\|c\|\gamma^{n-s-1}\mu^{s-n_0}.$$

Звідси

$$\|y_n^{(k)}\| \leq K\|c\|\rho^{n-n_0} + \frac{2K^2L\|c\|}{\mu-\rho}\mu^{n-n_0},$$

$$\|z_n^{(k)}\| \leq \frac{2K^2L\|c\|}{\gamma-\mu}\mu^{s-n_0}.$$

Із цих нерівностей випливає, що якщо $L < (\gamma-\rho)/(8K)$, $\mu = (\rho+\gamma)/2$, то нерівність (10) виконується.

Покажемо, що $x_n^{(k)}(c)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\|x_n^{(k)}(c) - x_n^{(k)}(\bar{c})\| \leq 2K\|c-\bar{c}\|\mu^{n-n_0} \tag{11}$$

і при цьому

$$\|z_n^{(k)}(c) - z_n^{(k)}(\bar{c})\| \leq \frac{2K^2L}{\gamma-\mu}\|c-\bar{c}\|\mu^{n-n_0},$$

$$n \geq n_0. \tag{12}$$

Оцінки (11) і (12) встановимо індукцією. Нульове наближення задовольняє ці оцінки. Припустимо, що $(k-1)$-е наближення їх задовольняє, тоді із формули (9) одержимо нерівності

$$\|y_n^{(k)}(c) - y_n^{(k)}(\bar{c})\| \leq K\|c-\bar{c}\|\rho^{n-n_0} +$$

$$+ \sum_{s=n_0}^{n-1} 2K^2L\|c-\bar{c}\|\rho^{n-s-1}\mu^{s-n_0},$$

$$\|z_n^{(k)}(c) - z_n^{(k)}(\bar{c})\| \leq \sum_{s=n}^{\infty} 2K^2L\|c-\bar{c}\|\gamma^{n-s-1}\mu^{s-n_0}.$$

Звідси, так само, як і раніше, одержимо оцінки (11) і (12).

Покажемо тепер, що для всіх k виконується нерівність

$$\|x_n^{(k)}(c) - x_n^{(k-1)}(c)\| \leq K\|c\|\left(\frac{4KL}{\gamma-\rho}\right)^{k-1}\mu^{n-n_0}, \tag{13}$$

де $\mu = (\rho+\gamma)/2$, $n \geq n_0$.

При $k=1$ ця нерівність, очевидно, виконується. Припустимо за індукцією, що (13) виконується. Оцінимо різницю $\|x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}\|$. Із (9) знаходимо

$$\|y_n^{(k+1)} - y_n^{(k)}\| \leq \sum_{s=n_0}^{n-1} K\rho^{n-s-1}L\|x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}\|,$$

$$\|z_n^{(k+1)} - z_n^{(k)}\| \leq \sum_{s=n}^{\infty} K\gamma^{n-s-1}L\|x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}\|.$$

Звідси, згідно з (13), одержимо

$$\|y_n^{(k+1)} - y_n^{(k)}\| \le K\|c\|\left(\frac{4KL}{\gamma-\rho}\right)^{k-1}\frac{KL}{\mu-\rho}\mu^{n-n_0},$$

$$\|z_n^{(k+1)} - z_n^{(k)}\| \le K\|c\|\left(\frac{4KL}{\gamma-\rho}\right)^{k-1}\frac{KL}{\gamma-\mu}\mu^{n-n_0},$$

$$n \ge n_0.$$

Звідси знаходимо, що

$$\|x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}\| \le K\|c\|\left(\frac{4KL}{\gamma-\rho}\right)^{k}\mu^{n-n_0},$$

$$n \ge n_0.$$

Ми одержали нерівність вигляду (13), якщо замінити k на $k+1$. Отже, нерівність (13) доведена.

Із оцінки (13) випливає, що якщо $L < \frac{\gamma-\rho}{4K}$, то послідовність $x_n^{(k)}(n_0, c)$ збігається рівномірно для всіх c та $n \ge n_0$. Позначимо $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)}(n_0, c) = x_n(n_0, c)$, $x_n(n_0, c) = \begin{pmatrix} y_n(n_0, c) \\ z_n(n_0, c) \end{pmatrix}$.

Із нерівності (10) випливає нерівність

$$\|x_n(n_0, c)\| \le 2K\|c\|\mu^{n-n_0}, \quad n \ge n_0. \quad (14)$$

Із нерівностей (11) і (12) випливають нерівності

$$\|x_n(n_0, c) - x_n(n_0, \overline{c})\| \le 2K\|c - \overline{c}\|\mu^{n-n_0},$$

$$\|z_n(n_0, c) - z_n(n_0, \overline{c})\| \le \frac{2K^2L}{\gamma-\mu}\|c - \overline{c}\|\mu^{n-n_0},$$

$$n \ge n_0. \quad (15)$$

Якщо перейти до границі у формулах (9), то переконаємося, що послідовність $x_n(n_0, c)$ є розв'язком системи рівнянь (8) і системи (1).

Із рівностей (8) при $n = n_0$ одержимо

$$y_{n_0}(n_0, c) = c, \quad z_{n_0}(n_0, c) =$$

$$= -\sum_{s=n_0}^{\infty} G_-(n_0, s+1) g_s(y_s(n_0, c), z_s(n_0, c)).$$

Нехай тепер $z_{n_0}(n_0, y) = h_{n_0}(y)$. Із оцінок (14) і (15) випливає, що функція $h_n(y)$ задовольняє твердження теореми. Із умови (6) випливає оцінка $\|h_n(y) - h_n(\overline{y})\| \le \frac{1}{2}\|y - \overline{y}\|$. Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (2), (4), (5), (6). Тоді існує послідовність поверхонь* $S^- = \{(y, z) \,\big|\, y = H_n(z), n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{R}^{m-\nu}, y \in \mathbb{R}^{\nu}\}$, *які задовольняють умови*

$$H_n(0) = 0, \|H_n(z) - H_n(\overline{z})\| \le \frac{1}{2}\|z - \overline{z}\| \quad (16)$$

і для розв'язку системи (1) з початковими даними y_{n_0}, z_{n_0}, n_0, *які задовольняють рівняння* $y = H_n(z)$, *виконується нерівність*

$$\|x_n\| \le 2K\|z_{n_0}\|\mu^{n-n_0},$$

де $n \le n_0$, $\mu = \frac{\rho+\gamma}{2}$.

Доведення теореми 2 можна провести тим же шляхом, що і доведення теореми 1.

Перейдемо до встановлення принципу зведення для системи (1). Для цього аналогічно [2] використаємо побудовані поверхні S^-, S^+ і доведемо, що стійкість системи (1) рівносильна стійкості деякої системи меншої розмірності.

Нехай $n = p$ – деяке число (початковий момент). Будемо розглядати тепер поверхні S^- при $n \ge p$ і покажемо, що поверхні S^- стійкі в тому розумінні, що вони притягують до себе всі близькі розв'язки x_n $(n \ge p)$.

Зауважимо, що поведінка розв'язків системи (1) на інтегральних поверхнях S^- описується рівнянням

$$w_{n+1} = B_n w_n + g_n(H_n(w_n), w_n). \quad (17)$$

Вектор-функція $g_n(H_n(w), w)$ перетворюється в нуль при $w = 0$ і задовольняє умову Ліпшиця відносно w.

Нехай $x_p \in \mathbb{R}^m$, $x_p = \begin{pmatrix} y_p \\ z_p \end{pmatrix}$, $x_n(p, x_p) = \begin{pmatrix} y_n(p, x_p) \\ z_n(p, x_p) \end{pmatrix}$ – розв'язок системи (1) з початковими даними $n = p$, $x_n = x_p$.

Теорема 3. *Нехай $x_n(p,x_p)$ – довільний розв'язок системи (1) з початковими даними $n=p$, $x_n=x_p$. При умовах теорем 1 та 2 існує розв'язок $\varphi_n(p,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}^{m-\nu}$, системи (1), що належить S^- і такий, що вірна оцінка*

$$\|x_n-\varphi_n(p,\alpha)\|\le 2K\|y_p-H_p(\alpha)\|\mu^{n-p},$$
$$n\ge p, 0<\mu<1. \qquad (18)$$

Доведення. Покажемо, що на S^- існує розв'язок, до якого $x_n(p,x_p)$ прямує при $n\to+\infty$. Позначимо через $x_n=\varphi_n(p,\alpha)$, де α – сталий вектор, $\alpha\in\mathbb{R}^{m-\nu}$, розв'язок системи (1), що міститься на S^-. Позначимо $\varphi_n(p,\alpha)=\begin{pmatrix}\psi_n(p,\alpha)\\ \chi_n(p,\alpha)\end{pmatrix}$, тоді розв'язок $x_n=\varphi_n(p,\alpha)$ буде мати початкові дані $\chi_p(p,\alpha)=\alpha$, $\psi_p(p,\alpha)=H_p(\alpha)$. Покажемо, що при фіксованому p кожному m-вимірному вектору x_p відповідає $(m-\nu)$-вимірний вектор α такий, що

$$\|x_n(p,x_p)-\varphi_n(p,\alpha)\|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \qquad (19)$$

Зробимо в системі (1) заміну змінних $u_n=y_n-\psi_n(p,\alpha)$, $v_n=z_n-\chi_n(p,\alpha)$, тоді одержимо систему

$$u_{n+1}=Au_n+U_n(u_n,v_n,\alpha),$$
$$v_{n+1}=Bv_n+V_n(u_n,v_n,\alpha), \qquad (20)$$

де $U_n(u_n,v_n,\alpha)=f_n(y_n,z_n)-f_n(\psi_n,\chi_n)$, $V_n(u_n,v_n,\alpha)=g_n(y_n,z_n)-g_n(\psi_n,\chi_n)$. Вектор-функції U_n та V_n неперервні за всіма своїми аргументами і задовольняють умову Ліпшиця з константою L відносно u_n та v_n. За теоремою 1 система (20) має інтегральні поверхні S^+ вигляду $v_n=h_n(u_n,\alpha)$, де вектор-функція h_n задовольняє такі умови:

$$h_n(0,\alpha)=0, \|h_n(u,\alpha)-h_n(\overline{u},\alpha)\|\le\frac{1}{2}\|u-\overline{u}\|. \qquad (21)$$

Функція h_n залежить від α неперервно. Кожний розв'язок u_n, v_n системи (20) з початковими даними $n=p$, $u_n=u_p$, $v_p=h_p(u_p,\alpha)$ задовольняє нерівності

$$\|u_n\|+\|v_n\|\le 2K\|u_p\|\mu^{n-p}, n\ge p, 0<\mu<1.$$

Покажемо, що існують такі u_p і α, що для розв'язку $x_n(p,x_p)$ системи (1) і розв'язку u_n, v_n системи, що лежить на послідовності поверхонь S^+, виконуються рівності

$$u_n=y_n(p,x_p)-\psi_n(p,\alpha),$$
$$v_n=z_n(p,x_p)-\chi_n(p,\alpha), \qquad (22)$$

звідки і буде випливати (19).

Якщо рівності (22) виконуються при $n=p$, то згідно з теоремою єдиності вони справджуються і при всіх $n\ge p$. При $n=p$ (22) мають вигляд

$$u_p=y_p-H_p(\alpha), \quad h_p(u_p,\alpha)=z_p-\alpha. \qquad (23)$$

Розглядаючи (23) як систему рівнянь відносно u_p і α, одержимо

$$\alpha=z_p-h_p(y_p-H_p(\alpha),\alpha). \qquad (24)$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок при довільних y_p та z_p. Розглянемо відображення $G(\alpha)=z_p-h_p(y_p-H_p(\alpha),\alpha)$. Використовуючи властивості (21) функції h_p, знаходимо оцінку $\|G(\alpha)-z_p\|\le 0,5\|y_p-H_p(\alpha)\|$, звідки $\|G(\alpha)-z_p\|\le 0,5\|y_p-H_p(z_p)\|+0,5\|H_p(z_p)-H_p(\alpha)\|$. Функція H_p задовольняє умову Ліпшиця (16), тому із останньої нерівності випливає, що $\|G(\alpha)-z_p\|\le 0,5\|y_p-H_p(z_p)\|+0,25\|\alpha-z_p\|$.

Розглянемо в $(m-\nu)$-вимірному просторі кулю M, що визначається нерівністю (відносно α) $\|\alpha-z_p\|\le\|y_p-H_p(z_p)\|$. Із нерівності

$$\|G(\alpha)-z_p\|\le 0,75\|y_p-H_p(z_p)\| \qquad (25)$$

випливає, що відображення $G(\alpha)$ переводить кулю M в себе, тому згідно з теоремою Брауера це відображення має нерухому точку α^*.

Отже, рівняння (24) має розв'язок $\alpha=\alpha^*$, який згідно з (25) задовольняє оцінку

$$\|\alpha^*-z_p\|\le 0,75\|y_p-H_p(z_p)\|. \qquad (26)$$

Підставляючи розв'язок α^* у перше рівняння (23), знаходимо, що пара α^*, u_p^*, де $u_p^*=y_p-H_p(\alpha^*)$, задовольняє систему (23). Теорема 3 доведена.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теорем 1 та 2. Якщо нульовий розв'язок системи (17) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок системи (1) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.*

Доведення. Нехай нульовий розв'язок системи (17) стійкий. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. При вибраному ε згідно з означенням стійкості знайдеться таке $\delta > 0$, що якщо $\|\alpha\| < \delta$, то розв'язок w_n системи (17) з початковою умовою $w_p = \alpha$ при $n \geq p$ задовольняє нерівність

$$\|w_n\| < \frac{\varepsilon}{2K + 1,5}. \qquad (27)$$

Розглянемо розв'язок $x_n = (y_n \; z_n)^T$ системи (1) з початковими даними $n = p$, $y_n = y_p$, $z_n = z_p$, що задовольняють оцінку $\|y_p\| + \|z_p\| < \delta/2$. Із оцінки (26) випливає нерівність $\|\alpha^*\| < \delta$, а із нерівностей (18) і (27) випливає, що

$$\|x_n\| = \|y_n\| + \|z_n\| \leq \|\varphi_n(p,\alpha)\| + \|x_n - $$
$$-\varphi_n(p,\alpha)\| \leq \|H_n(w_n)\| + \|w_n\| + 2K\|y_p - $$
$$-H_p(\alpha)\| < \varepsilon.$$

Це і доводить стійкість нульового розв'язку системи (1).

Якщо нульовий розв'язок системи (17) асимптотично стійкий, то із оцінки (18) випливає асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (1).

Нарешті, якщо нульовий розв'язок системи (17) нестійкий, то за означенням і нульовий розв'язок системи (1) нестійкий. Теорема 4 доведена.

Зауваження 1. Нехай система (1) є лінійною, тобто функції $f_n(y,z)$ та $g_n(y,z)$ лінійні відносно y, z. У цьому випадку функції $h_n(y)$ та $H_n(z)$ також будуть лінійними відносно y, z. Із теореми 3 випливає існування заміни $y_n = u_n + H_n(w_n)$, $z_n = w_n + h_n(u_n)$, яка розщеплює систему (1) на дві незалежні системи

$$u_{n+1} = A_n u_n + f_n(u_n, h_n(u_n)),$$
$$w_{n+1} = B_n w_n + g_n(H_n(w_n), w_n).$$

Зауваження 2. Нехай матриці $A_n = A$, $B_n = B$ не залежать від n, всі власні значення матриці B за модулем рівні одиниці, всі власні значення матриці A за модулем менші одиниці, а функції $f_n(y,z)$, $g_n(y,z)$ можна розкласти в степеневі ряди з періодичними коефіцієнтами. Тоді функцію $H_n(z)$ також можна шукати у вигляді степеневого ряду і теорема 4 дозволяє обгрунтувати алгоритм дослідження стійкості у критичному випадку.

Зауваження 3. Теореми 1 та 2 можна узагальнити на випадок рівнянь у банаховому просторі, а теореми 3 та 4 – на випадок, коли y_n належать банаховому простору, а z_n – скінченновимірному простору.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.
2. *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
3. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. *Самойленко А.М., Мартынюк Д.И., Перестюк Н.А.* Существование инвариантных торов систем разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 10. – С. 1904 – 1910.
5. *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 246 с.
6. *Гулов Х.М., Перестюк Н.А.* Интегральные множества систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1613 – 1621.
7. *Марданов И.Дж., Валеев К.Г.* Принцип сведения для разностных уравнений. – Баку: Элм, 1991. – 264 с.