Bukovinian Math. Journal. 2021, **9**, 1, 237–249 Буковинський матем. журнал 2021, Т.9, №1, 237–249

Мацак І. К.

ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗНАЧЕННЯ ПРОЦЕСІВ НАРОДЖЕННЯ ТА ЗАГИБЕЛІ

Установлюється швидкість збіжності до експоненційного розподілу в граничній теоремі для екстремумів процесів загибелі та розмноження. Наводяться приклади застосувань до процесів, які задають довжину черги.

Ключові слова і фрази: Процеси загибелі та розмноження, процеси черги, довжина черги.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine (Matsak I. K.)
e-mail: *ivanmatsak@univ.kiev.ua (Matsak I. K.)*

Присвячується пам'яті В.К.Маслюченка, чудового математика і друга.

Вступ

Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування (СМО), на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування η має експоненційний розподіл

$$\mathbf{P}(\eta < x) = 1 - \exp(-\mu x).$$

Тобто в загальноприйнятих позначеннях - це СМО типу $M/M/1$ (див. [4]).

Нехай W_i - це час чекання в черзі i - ї заявки, $W_1 = 0$.

Під довжиною черги тут і далі будемо розуміти загальне число заявок, які знаходяться на обслуговуванні або чекають його. І позначаємо через $Q(t)$ довжину черги в момент часу t. Нехай

$$\bar{Q}(t) = \sup_{0 \le s < t} Q(s),$$

$$\bar{W}_n = \max_{1 \le i \le n} W_i.$$

На СМО $M/M/1$ накладемо умову:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \tag{1}$$

УДК 519.21
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 60K25; Secondary 60F05.

Екстремальні значення довжини черги $\bar{Q}(t)$ та часу чекання в черзі $\bar{W}_n$ для СМО вивчались в багатьох роботах(див., наприклад, [2], [6] та огляд [1]). Подібні задачі розглядались і для процесів народження та загибелі [10].

Звичайно в таких дослідженнях використовувались лінійні нормування і класична теорія екстремальних значень незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.). Але, як виявилось, в багатьох важливих випадках (наприклад, коли $\lambda < \mu$) при лінійних нормуваннях для $\bar{Q}_t$ не існує невироджений граничний розподіл. Аналогічна ситуація зберігається і для процесів народження та загибелі [10].

Інший підхід до подібних задач, який грунтувався на деякому невипадковому перетворенні часу, був запропонований у статтях [11], [12]. При цьому граничним виявився експоненційний розподіл. Більше того, для СМО $M/M/1$ у роботі [12] була знайдена наступна оцінка швидкості збіжності.

Покладемо для $x > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta(Q,x) &= \mathbf{P}(\bar{Q}(t^*) \geq u) - 1 + \exp(-x), \\ t^* &= t^*(x,u) = \frac{x}{\lambda(1-\rho)q(u)}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$q(u) = (\frac{1}{\rho} - 1)\frac{\rho^u}{1-\rho^u}.$$

Якщо виконується умова (1), то для досить великих u

$$\sup_{x\geq 0} |\Delta(Q,x)| \leq Cu\rho^u, \tag{3}$$

де C - деяка константа, залежна від параметрів λ, μ, і не залежна від u.

Тут ми спробуємо отримати оцінки, аналогічні (3) для більш загального випадку процесів народження та загибелі. Такі оцінки розглядались і у праці [12]. Тому дану роботу слід розглядати, як продовження роботи [12] та деяке уточнення її результатів. Далі будуть наведені також застосування отриманих результатів до процесу $Q(t)$, який описує довжину черги в СМО.

1 Основна теорема

Нехай $X(t)$ - марковський процес зі станами $0, 1, 2, \ldots$, а його ймовірності переходу $p_{i,j}(t)$ стаціонарні, тобто

$$p_{i,j}(t) = \mathbf{P}(X(t+s) = j / X(s) = i).$$

Припустимо, що виконуються умови: при $h \to 0$

$$\begin{aligned} &1. \quad p_{i.i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \quad i \geq 0, \\ &2. \quad p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), \quad i \geq 1, \\ &3. \quad p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad i \geq 0, \\ &4. \quad \mu_0 = 0, \lambda_0 > 0, \mu_i > 0, \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{4}$$

Тоді $X(t)$ називають процесом народження та загибелі. Такі процеси широко застосовуються в біології, теорії масового обслуговування, теорії надійності і т.п. ([4], §1.4, [5], §6.3, [7], §7.4).

Введемо такі позначення:

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad k \geq 1,$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\lambda_i}, \quad q(u) = (\sum_{k=0}^{u-1} \alpha_k)^{-1}. \tag{5}$$

Далі вважаємо, що процес загибелі та розмноження задовольняє умови (4), а також

$$\sum_{k\geq 1} \theta_k < \infty, \tag{6}$$

$$\sum_{k\geq 1} \alpha_k = \infty. \tag{7}$$

Відомо [7], що тоді існують стаціонарні ймовірності станів

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(X(t) = k) = \lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k, \tag{8}$$

причому

$$p_k = \theta_k p_0, \quad p_0 = (\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k)^{-1}. \tag{9}$$

Сформулюємо основні результати роботи.

Покладемо

$$\bar{X}(t) = \sup_{0\leq s<t} X(s),$$

Теорема 1. *Нехай $X(t)$ процес народження та загибелі, який задовольняє умови (4)-(7). Якщо*

$$X(0) = 0 \quad \text{м.н.}, \quad x > 0, \quad t^* = t^*(x,u) = xa^-/q(u),$$
$$\Delta(X,x) = \mathbf{P}(\bar{X}(t^*) \geq u) - 1 + \exp(-x).$$

Тоді при досить великих цілих додатних u

$$\sup_{x\geq 0} |\Delta(X,x)| \leq \kappa(u), \tag{10}$$

де

$$\kappa(u) = (p_0 + o(1))q(u) \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \theta_k + C_1 q(u) \ln \frac{1}{q(u)}, \tag{11}$$

$$a^- = \frac{1}{\lambda_0}(1 + \frac{q(u)}{1-q(u)} \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \theta_k),$$
$$C_1 = (\pi)^{-1} \left(1 + (\lambda_0 p_0)^2 a_2/2 + o(1)\right).$$

Величина $q(u)$ задається формулою (5), $a_2 = \mathbf{E}T^2$ - це другий момент тривалості циклу регенерації для процесу народження та загибелі відома (див. [12]).

Наслідок 1. *Якщо* $X(t)$ *процес народження та загибелі, який задовольняє умови теореми 1 і*

$$\forall \quad i \geq 0, \quad j \geq 1, \quad 0 < \rho_0 \leq \frac{\lambda_i}{\mu_j} \leq \rho < 1,$$

то виконується нерівність (10) при

$$\kappa(u) = (p_0 + C_1(\frac{1}{\rho} - 1)\ln\frac{1}{\rho_0})u\rho^u,$$

де величина C_1 *визначена в теоремі 1.*

Зауваження 1. *У кінці роботи ми наведемо приклад процесу народження та загибелі* $X(t)$*, для якого*

$$\forall \quad i \geq 0, \quad j \geq 1, \quad \lambda_i = \lambda > 0, \quad \mu_j = \mu > 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1,$$

$$C_2 u\rho^u \leq \sup_{x\geq 0}|\Delta(X,x)| \leq C_3 u\rho^u,$$

а величини C_2 *та* C_3 *не залежать від* u.

Позначимо через $\mathfrak{T}_X(u)$ 1-й момент досягнення процесом $X(t)$ рівня u, тобто

$$\mathfrak{T}_X(u) = \inf(t \geq 0 : \quad X(t) \geq u).$$

Оскільки

$$\forall t > 0 \quad \{\bar{X}(t) \geq u\} \Leftrightarrow \{\mathfrak{T}_X(u) \leq t\},$$

то із теореми 1 випливає

Наслідок 2. *В умовах і позначеннях теореми 1*

$$\sup_{x\geq 0}|\mathbf{P}(\frac{q(u)}{a^-}\mathfrak{T}_X(u) < x) - 1 + \exp(-x)| \leq \kappa(u), \tag{12}$$

де $\kappa(u)$ *задається рівністю (11).*

2 Доведення теореми 1

Спочатку установимо деякі допоміжні результати. Розглянемо регенеруючий випадковий процес $Y(t), t \geq 0$,

$$Y(t) = \xi_k(t - S_{k-1}), \quad \text{при} \quad t \in [S_{k-1}, S_k),$$

де $S_k = T_1 + \ldots + T_k, k \geq 1$, $S_0 = 0$, $\pounds_k = (T_k, \xi_k(t))$, $k \geq 1$, нескінченна послідовність незалежних циклів, однаково розподілених з циклом $\pounds = (T, \xi(t))$, $T \geq 0$ майже напевно(м.н.) (див., наприклад, [8], ч.II, гл.2, [3], гл.11, §8). Звичайно точки S_k називають моментами регенерації, а проміжок $[S_{k-1}, S_k)$ – k - м періодом регенерації.

Введемо деякі необхідні в подальшому позначення.

$$\bar{Y}(t) = \sup_{0\le s<t} Y(s), \quad Z_k = \sup_{S_{k-1}\le s<S_k} Y(s), \quad k = 1,2,\ldots.$$

Будемо вважати, що

$$\mathbf{E}T = a < \infty, \quad \mathbf{E}T^2 = a_2 < \infty. \tag{13}$$

і для всіх $u \in \mathbf{R}$

$$q(u) = \mathbf{P}(Z_k \ge u) > 0$$

(у випадку процесу народження та загибелі величина $q(u)$ задається рівністю (5)).

Нехай T_k^- довжини циклів, на яких відбулася подія $\{Z_k < u\}$ (цикли типу 1),

$$F^-(x) = \mathbf{P}(T_k^- < x) = \mathbf{P}(T_k < x / Z_k < u),$$

$$a^- = \int_0^\infty x dF^-(x), \quad a_2^- = \int_0^\infty x^2 dF^-(x).$$

Аналогічні позначення

$$T_k^+, \quad F^+(x), \quad a^+, \quad a_2^+$$

віднесемо до циклів 2- го типу, на яких відбулася протилежна подія $\{Z_k \ge u\}$.

Важливим кроком на шляху доведення теореми 1 є

Лема 1. *Нехай $Y(t), t \ge 0$, регенеруючий випадковий процес,* $x > 0$, $t^* = t^*(x,u) = xa^-/q(u)$,

$$\Delta(Y,x) = \mathbf{P}(\bar{Y}(t^*) \ge u) - 1 + \exp(-x).$$

І нехай виконується умова (13).

Тоді

$$\sup_{x\ge 0} |\Delta(Y,x)| \le \kappa_0(u), \tag{14}$$

де

$$\kappa_0(u) = \frac{a^+}{a^-} q(u) + \hat{C} q(u) \ln \frac{1}{q(u)}, \tag{15}$$

$$\hat{C} = (\pi)^{-1} \left(1 + a_2^-/2(a^-)^2 + o(1)\right).$$

Лема 1 - це фактично еквівалентне переформулювання твердження 1 із роботи [12].

Добре відомо [12], що в умовах теореми 1 процес народження та загибелі $X(t)$ буде регенеруючим процесом з моментами регенерації $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots S_k \ldots$, тут S_k - це перший момент попадання в стан 0 після k - го виходу із нього,
$T_k = S_k - S_{k-1}$, - довжина k - го циклу регенерації, $T_1 = T$.

Як і в лемі 1 через T_k^- позначаємо довжини циклів 1-го типу (на яких процес $X(t)$ не досягає рівня u).

Лема 2. *Нехай $X(t)$ процес народження та загибелі, який задовольняє умови теореми 1. Тоді*

$$a^- = \mathbf{E}T_k^- = \frac{1}{\lambda_0}(1 + \frac{q(u)}{1-q(u)} \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \theta_k). \tag{16}$$

Доведення леми 2. Введемо такі позначення:

$$\mathbb{T}_{i,0} = \min(t > 0 : X(t) = 0/X(0) = i),$$

$$\mathbb{T}_{i,0}^u = \mathbb{T}_{i,0} I(\bar{X}(\mathbb{T}_{i,0}) < u), \quad i = 1, 2, \ldots, u-1,$$

тобто $\mathbb{T}_{i,0}^u$ - це час до першого попадання процесу $X(t)$ в стан 0 із стану i при умові, що рівень u не досягається, та дорівнює 0 в противному випадку.

І нехай $m_i = \mathbf{E}\mathbb{T}_{i,0}^u$. Позначимо через τ_i час перебування процесу $X(t)$ у стані i, $\mathbf{E}\tau_i = 1/(\lambda_i + \mu_i)$. Тоді повторюючи міркування Карліна([7], гл.7, с.228) в близькій задачі, отримаємо для m_i рекурентні співвідношення

$$m_i = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} m_{i+1} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} m_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, u-1,$$

причому $m_0 = m_u = 0$.

Звідси випливає така рівність(див.[7], гл.7, с.229)

$$m_n - m_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{\mu_j}{\lambda_j} - m_1 \alpha_n. \tag{17}$$

Далі скористаємось рівністю

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{\mu_j}{\lambda_j} = \alpha_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i}{\lambda_0}$$

і перепишемо (17) наступним чином

$$m_n - m_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} \theta_i - m_1 \alpha_n, \quad 1 \le n \le u-1. \tag{18}$$

Враховуючи співвідношення $m_0 = m_u = 0$, $\alpha_0 = 1$ та $\sum_{i=1}^{0} = 0$, неважко побачити, що рівність (18) залишиться вірною і при $n = 0$.

Тому, підсумовуючи по n від 0 до $u-1$ праву і ліву частини в (18), отримаємо

$$0 = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{i=1}^{n} \theta_i - m_1 \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n,$$

або, що еквівалентно

$$m_1 = (\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n)^{-1} \frac{1}{\lambda_0} \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Остання рівність вже дозволяє просто обчислити величину a^-.

$$
\begin{aligned}
a^- &= \mathbf{E}(\tau_0 + \mathbb{T}_{1,0}/\bar{X}(\mathbb{T}_{1,0}) < u) = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{1-q(u)}\mathbf{E}(\mathbb{T}_{1,0} I(\bar{X}(\mathbb{T}_{1,0}) < u) \\
&= \frac{1}{\lambda_0} + \frac{m_1}{1-q(u)} = \frac{1}{\lambda_0}(1 + \frac{1}{1-q(u)}\frac{\sum_{n=0}^{u-1}\alpha_n \sum_{k=1}^{n}\theta_k}{\sum_{n=0}^{u-1}\alpha_n}). \qquad (19)
\end{aligned}
$$

□

Зауваження 2. *Величина a^- для процесу народження та загибелі була знайдена раніше у лемі 5 праці [12]. На жаль наведені там обчислення містять помилку.*

Зауваження 3. *Оскільки при $u \to \infty$ $\quad q(u) \to 0, \quad \sum_{n=0}^{u-1}\alpha_n \to \infty, \quad$ то*

$$
\frac{\sum_{n=0}^{u-1}\alpha_n \sum_{k=1}^{n}\theta_k}{\sum_{n=0}^{u-1}\alpha_n} \to \sum_{k=1}^{\infty}\theta_k,
$$

а отже

$$
a^- \to \frac{1}{\lambda_0 p_0} = a. \qquad (20)
$$

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1. Зрозуміло, що воно буде грунтуватися на лемах 1, 2.

Спочатку перепишемо величину $k_0(u)$ із леми 1 у більш простому еквівалентному вигляді. Згідно з означенням в.в. a^- та a^+ маємо

$$
a = (1-q(u))a^- + q(u)a^+.
$$

Так само можна записати рівняння для других моментів

$$
a_2 = (1-q(u))a_2{}^- + q(u)a_2{}^+.
$$

Звідси неважко виводяться наступні нерівності

$$
a^- \le \frac{a}{1-q(u)}, \quad a_2{}^- \le \frac{a_2}{1-q(u)}, \qquad (21)
$$

та

$$
q(u)a^+ \le |a - a^-| + q(u)a^-. \qquad (22)
$$

Збираючи разом співвідношення (20), (21),(22), отримаємо таку оцінку

$$
k_0(u) \le k(u) = (\lambda_0 p_o + o(1))|a - a^-| + C_1 q(u) \ln\frac{1}{q(u)}, \qquad (23)
$$

де C_1 визначено у теоремі 1.

Для завершення доведення залишається обчислити величину $a - a^-$. Скористаємось лемою 2.

$$
\begin{aligned}
a - a^- &= \frac{1}{\lambda_0 p_o} - \frac{1}{\lambda_0}(1 + \frac{q(u)}{1-q(u)} \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \theta_k) \\
&= \frac{1}{\lambda_0}(\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k - 1 - \frac{1}{1-q(u)} \frac{\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \theta_k)}{\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n}) \\
&= \frac{1}{\lambda_0}(\frac{\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \theta_k)}{\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n} - \frac{q(u)}{1-q(u)} \frac{\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \theta_k)}{\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n}) \\
&= \frac{q(u)}{\lambda_0} \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \theta_k + \frac{q(u)\theta}{\lambda_0 p_0 (1-q(u))}, \qquad (24)
\end{aligned}
$$

де $0 \le \theta \le 1$.

Підставляючи вираз для $a - a^-$ із (24) у формулу для k (u) (див. (23)), будемо мати оцінки (10), (11) теореми 1. □

Далі розглянемо наслідок 1. В його умовах можна записати наступні прості оцінки:

$$
\begin{aligned}
q(u) &= (\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n)^{-1} \le (\sum_{n=0}^{u-1} \frac{1}{\rho^i})^{-1} \\
&= \frac{1/\rho - 1}{1/\rho^u - 1} \approx \rho^u (\frac{1}{\rho} - 1), \qquad (25)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{q(u)} = \sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \le \frac{1/\rho_0^u - 1}{1/\rho_0 - 1} \approx \frac{1}{\rho_0^u} (\frac{\rho_0}{1-\rho_0}), \qquad (26)
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n \sum_{i=n+1}^{\infty} \theta_i &= \frac{\lambda_0}{\mu_{n+1}} + \frac{\lambda_0 \lambda_{n+1}}{\mu_{n+1} \mu_{n+2}} + \ldots \\
&\le \rho + \rho^2 + \ldots = \frac{\rho}{1-\rho}.
\end{aligned}
$$

А отже

$$
\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{i=n+1}^{\infty} \theta_i \le \frac{\rho u}{1-\rho}. \qquad (27)
$$

Наслідок 1 негайно випливає із оцінок (25)-(27) та формули (11) теореми 1. □

3 Приклади

У даному підрозділі будуть наведені кілька прикладів застосувань отриманих вище результатів до екстремальних значень довжини черги в СМО. Фактично тут ми дещо уточнюємо константи в оцінках із роботи [12].

Приклад 1. СМО $M/M/s, \quad 1 \le s < \infty.$

Розглянемо s- канальну систему масового обслуговування (СМО) , $1 \le s < \infty$, на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування η має експоненційний розподіл

$$\mathbf{P}(\eta < x) = 1 - \exp(-\mu x)$$

(див. [4], [7], [9]).

Вважаємо, що параметри λ та μ задовольняють умову

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1. \tag{28}$$

Нехай в момент $S_0 = 0$ система порожня, а S_1 - це момент звільнення системи після 1-го періоду зайнятості. Відповідно S_k - це момент звільнення системи після k-го періоду зайнятості.

Як і вище через $Q(t)$ позначаємо довжину черги в момент часу t, а $\bar{Q}(t) = \sup_{0\le s<t} Q(s)$. Тоді процес $Q(t)$ - це регенеруючий процес з моментами регенерації (S_k), $T_k = S_k - S_{k-1}$ - тривалість k - го періоду регенерації, $T_1 = T$.

Більше того, добре відомо ([7], с.219-220), що $Q(t)$ буде процесом загибелі та розмноження з параметрами:

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{при} \quad 1 \le k \le s, \\ s\mu, & \text{при} \quad k > s. \end{cases}$$

Якщо вірна нерівність (28), то процес $Q(t)$ задовольняє умови (6), (7). Таким чином, для оцінки величини $\Delta(Q, x)$ можна скористатися теоремою 1.

Відомо [4],[7], що за умови (28) для процесу $Q(t)$ існують стаціонарні ймовірності, причому

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{s^s \rho^{s+1}}{s!(1-\rho)} \right)^{-1}. \tag{29}$$

і для досить великих u

$$q(u) = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{k!}{(s\rho)^k} + \frac{s!((1/\rho)^u - (1/\rho)^{s+1})}{s^s(1/\rho - 1)} \right)^{-1} \sim (1/\rho - 1)\frac{s^s \rho^u}{s!} \tag{30}$$

(див. [11]).

Наступна проста оцінка знайдена у роботі [12]

$$\sum_{k=u}^{\infty} \theta_k \le \frac{s^s}{s!} \sum_{k=u}^{\infty} \rho^k = \frac{s^s}{s!(1-\rho)} \rho^u. \tag{31}$$

Далі із співвідношень (30), (31) так само, як і у випадку наслідка 1, одержуємо при $u \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{u-1} \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \theta_k \le \frac{(\rho + o(1))u}{1-\rho}$$

Збираючи разом наведені вище оцінки, маємо

Твердження 1. *Нехай для СМО* $M/M/s, \quad 1 \le s < \infty$, *виконується умова* (28) *і*

$$Q(0) = 0 \quad \text{м.н.}, \quad x > 0, \qquad t^* = t^*(x,u) = \frac{a^- x}{q(u)},$$

$$\Delta(Q,x) = \mathbf{P}(\bar{Q}(t^*) \ge u) - 1 + \exp(-x).$$

Тоді

$$\sup_{x \ge 0} |\Delta(Q,x)| \le \frac{s^s}{s!}(p_0 + C_1(\frac{1}{\rho} - 1)\ln\frac{1}{\rho})u\rho^u, \tag{32}$$

де a^-, C_1 *визначені в теоремі 1,* $p_0, q(u)$ *задаються формулами (29), (30).*

У випадку $s = 1$ твердження 1 можна дещо уточнити

Приклад 2. СМО M/M/1.

Дана класична СМО описана на початку роботи (див. також [4], [9]).

При виконанні умови (28), та $\rho = \lambda/\mu$ для СМО M/M/1 відомі наступні формули [4], [7], [11]:

$$p_0 = 1 - \rho, \quad q(u) = \frac{(\frac{1}{\rho} - 1)\rho^u}{1 - \rho^u}. \tag{33}$$

Середнє значення тривалості циклу 1-го типу також знаходиться просто

$$a^- = \mathbf{E}T_k^- = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{\rho q(u)}{(1-\rho)(1-q(u))}\sum_{n=1}^{u-1}\frac{1-\rho^n}{\rho^n}). \tag{34}$$

Твердження 2. *Нехай в умовах твердження 1* $s = 1, \quad 0 < \rho = \lambda/\mu < 1.$

(i) Тоді

$$\sup_{x \ge 0} |\Delta(Q,x)| \le C_3 u\rho^u, \tag{35}$$

де $C_3 = 1 - \rho + (1/\pi)(2\rho - 2 + 1/\rho)\ln(1/\rho) + o(1)$, $q(u)$ *та* a^- *задаються формулами (33), (34) відповідно.*

(ii) Якщо ϑ *таке, що*

$$0 < \vartheta < 1, \quad \vartheta + \ln\frac{1}{\vartheta} \ge \ln\frac{1}{\rho} + 1, \tag{36}$$

то

$$C_2 u\rho^u \le \sup_{x \ge 0} |\Delta(Q,x)|, \tag{37}$$

де $C_2 = \vartheta(1-\rho)^2/(1 + \rho + o(1))$.

Умова (36) виконуються, наприклад, при $\vartheta = \rho/e$.

Доведення твердження 2.(i). Враховуючи співвідношення (32) та (33), маємо оцінку

$$\sup_{x\geq 0}|\Delta(Q,x)| \leq (1-\rho + C_1(\frac{1}{\rho}-1)\ln\frac{1}{\rho})u\rho^u, \tag{38}$$

де $C_1 = (1/\pi)(1+\lambda^2(1-\rho)^2 a_2/2 + o(1))$.

Як і вище через T позначаємо тривалість періоду регенерації процесу $Q(t)$, T^z - тривалість періоду зайнятості, τ_0 - час сидіння $Q(t)$ у стані 0. Тоді (див. [9])

$$\mathbf{E}T = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}, \quad \mathbf{D}\tau_0 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \mathbf{D}T^z = \frac{\lambda+\mu}{(\mu-\lambda)^3}.$$

Останні рівності дозволяють знайти просту формулу для величини a_2:

$$a_2 = \mathbf{D}T + (\mathbf{E}T)^2 = \mathbf{D}T^z + \mathbf{D}\tau_0 + (\mathbf{E}T)^2 =$$

$$= \frac{\lambda+\mu}{(\mu-\lambda)^3} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2(1-\rho)^2}.$$

Звідси

$$C_1 = \frac{2\rho^2 - 2\rho + 1}{\pi(1-\rho)} + o(1), \quad C_3 = 1-\rho + (1/\pi)(2\rho - 2 + 1/\rho)\ln(1/\rho) + o(1),$$

тобто нерівність (35) установлена.

(ii). Щоб довести оцінку знизу (37), виберемо

$$x = x_u = \frac{\vartheta}{a^-(\lambda+\mu)}uq(u), \quad t^* = \frac{a^- x_u}{q(u)} = \frac{\vartheta u}{\lambda+\mu}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\sup_{x\geq 0}|\Delta(Q,x)| &\geq |\mathbf{P}(\bar{Q}(t^*) \geq u) - 1 + \exp(-x_u)| \\ &= |\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\nu_u - 1} T_k + \eta_{\nu_u} \leq t^*) - 1 + \exp(-x_u)|, \end{aligned} \tag{39}$$

де ν_u - це номер першого циклу, на якому був досягнутий рівень u, η_{ν_u} - це час від початку циклу ν_u до моменту перескоку через рівень u.

Спочатку оцінимо зверху перший доданок справа у рівності (39). Через τ_i позначаємо час сидіння в стані i процесу $Q(t)$ на циклі ν_u, τ_i^e - стандартні незалежні експоненційні в.в. Відзначимо, що величина η_{ν_u} звичайно залежна від вкладеного ланцюга Маркова, а величина τ_i, час сидіння в стані i, незалежна. Тому

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\nu_u - 1} T_k + \eta_{\nu_u} \leq t^*) \leq \mathbf{P}(\eta_{\nu_u} \leq \frac{\vartheta u}{\lambda+\mu}) \\ \leq \;& \mathbf{P}(\sum_{i=0}^{u-1}\tau_i \leq \frac{\vartheta u}{\lambda+\mu}) \leq \mathbf{P}(\sum_{i=0}^{u-1}\tau_i^e \leq \vartheta u). \end{aligned} \tag{40}$$

Далі запишемо таку нерівність

$$\sum_{k=u+1}^{\infty}(\vartheta u)^{k-u}\frac{u!}{k!} \le \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\vartheta u)^s}{(u+1)(u+2)\dots(u+s)} \le \sum_{s=1}^{\infty}\vartheta^s = \frac{\vartheta}{1-\vartheta},$$

а отже

$$\begin{aligned}\sum_{k=u}^{\infty}\frac{(\vartheta u)^k}{k!} &= \frac{(\vartheta u)^u}{u!}(1+\sum_{k=u+1}^{\infty}(\vartheta u)^{k-u}\frac{u!}{k!})\\ &\le \frac{1}{1-\vartheta}\frac{(\vartheta u)^u}{u!}.\end{aligned} \tag{41}$$

Із оцінки (41) та асимптотичної формули Стірлінга одержуємо

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\sum_{i=0}^{u-1}\tau_i^e \le \vartheta u) = \sum_{k=u}^{\infty}\frac{(\vartheta u)^k}{k!}\exp(-\vartheta u)\\ \le\ & \frac{1}{1-\vartheta}\frac{(\vartheta u)^u}{u!}\exp(-\vartheta u) \sim \frac{1}{1-\vartheta}\frac{(\vartheta)^u}{\sqrt{2\pi u}\exp(-u)}\exp(-\vartheta u)\\ =\ & \frac{1}{(1-\vartheta)\sqrt{2\pi u}}\exp(-(\vartheta+\ln(1/\vartheta)-1)u).\end{aligned} \tag{42}$$

Таким чином разом оцінки (40) та (42) дають таке асимптотичне співвідношення

$$\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\nu_u-1}T_k+\eta_{\nu_u} \le t^*) = O(\frac{1}{\sqrt{u}}\exp(-(\vartheta+\ln(1/\vartheta)-1)u).) \tag{43}$$

Залишається оцінити доданок $1+\exp(-x_u)$ із нерівності (39). Зробити це неважко:

$$\begin{aligned}1-\exp(-x_u) &= 1-\exp(-\frac{\vartheta u q(u)}{a^-(\lambda+\mu)}) \sim \frac{\vartheta u q(u)}{a^-(\lambda+\mu)}\\ &\sim \frac{\vartheta u \rho^u}{a(\lambda+\mu)}(\frac{1}{\rho}-1) \sim \frac{\vartheta(1-\rho)^2}{1+\rho}u\rho^u.\end{aligned} \tag{44}$$

Згідно з умовою (36) та оцінками (43), (44)

$$\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\nu_u-1}T_k+\eta_{\nu_u} \le t^*) = o(1-\exp(-x_u)).$$

Звідси негайно випливає нерівність (37). $\square$

Зауваження 4. *Для СМО $M/M/\infty$(нескінчене число каналів) оцінка величини $\sup_{x\ge0}|\Delta(Q,x)|$ із праці [12] залишається без змін. Методи даної роботи не дозволяють її істотно посилити.*

Список літератури

[1] Asmussen S. *Extreme values theory for queues via cycle maxima.* Extremes 1998, **1**, 137–168. DOI.org/10.1023/A:1009970005784

[2] Cohen J.W. *Extreme values distribution for the M/G/1 and GI/M/1 queueing systems.* Ann. Inst. H. Poincare. Sect.B, 1968, **4**, 83–98. MR 0232466

[3] *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications, vol.2, John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1968.

[4] *Gnedenko B.V., Kovalenko I.N.* Introduction to Queueing Theory, Birkhauser, Boston, 1989.

[5] Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyev A.D. Mathematical metods of reliability theory, Academic Press, New York, London, 1969.

[6] Iglehart D.L. *Extreme values in the GI/G/1 gueue* . Ann. Math. Statist. 1972, **43**, 627–635. DOI.org/10.1214/aoms/1177692642

[7] Karlin S. A first course in stochastic processes, Academic Press, New York, 1968.

[8] Smith W.L. *Renewal theory and its ramifications.* J. Royal Statist. Soc. 1958, **20**, №2, 243–302. DOI.org/10.1111/j.2517-6161.1958.tb00294.x

[9] Riordan J. Stochastic service systems , John Wiley and Sons, New York, London, 1962.

[10] Serfozo R.F. *Extreme values of birdh and death processes and queues* . Stochastic processess and their applications 1988, **27**, 291–306.DOI.org/10.1016/0304-4149(87)90043-3

[11] Zakusylo O.K., Matsak I.K. *On extreme values of some regenerative processes.* Theory Probab. Math. Ststist. 2017, **97**, 58–71 (In Ukrainian).DOI.org/10.1090/tpms/1048

[12] Zakusylo O.K., Matsak I.K. *Estimates for the convergence rate in the limit theorem for extreme values of regenerative processes.*Ukr. Math.j. 2020, **72**, №8, 1064-1081(In Ukrainian).DOI.org/10.1007/s11253-020-01855-1

Надійшло 06.05.2021

Matsak I. K. *On extreme values of birth and death processes.*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 237–249.

We establish the convergence rate to exponential distribution in a limit theorem for extreme values of birth and death processes. Some applications of this result are given to processes specifying queue length.).

We establish uniform estimates for the convergence rate in the exponential distribution in a limit theorem for extreme values of birth and death processes. This topic is closely related to the problem on the time of first intersection of some level u by a regenerating process. Of course, we assume that both time t and level u grow infinitely. The proof of our main result is based on an important estimate for general regenerating processes. Investigations of the kind are needed in different fields: mathematical theory of reliability, queueing theory, some statistical problems in physics. We also provide with examples of applications of our results to extremal queueing problems $M/M/s$. In particular case of queueing $M/M/1$, we show that the obtained estimates have the right order with respect to the probability $q(u)$ of the exceeding of a level u at one regeneration cycle, that is, only improvement of the corresponding constants is possible.

Key words and phrases: extremes, birth and death processes, queuing systems, queue length