

©1999 р. Т.М. Балабушенко, С.Д. Івасишен

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ УЛЕНБЕКА—ОРНШТЕЙНА З ВИРОДЖЕННЯМ

Знайдені явні вирази для елементів вектор-функцій Гріна крайових задач Діріхле і Неймана без початкових умов для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека—Орнштейна з виродженням. Описаний клас розв'язків, які можуть бути зображені в інтегральній формі за допомогою вектор-функцій Гріна.

We find the explicit expressions for elements of Green's vector-functions of Dirichlet and Neumann boundary value problems without initial conditions for Kolmogorov's equation for Uhlenbeck – Ornstein diffusion process with degeneration. The class of solutions that can be represented with the aid of Green's vector-function in the integral form is described.

Стаття присвячена знаходженню формул для розв'язків задач Діріхле і Неймана в області $Q_{-\infty} \equiv \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < T, x > 0\}$, де T – задане дійсне число, для рівняння

$$Lu(t, x) \equiv (\alpha(t)\partial_t - \partial_x^2 - x\partial_x - 1)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_{-\infty}, \quad (1)$$

в якому $\alpha: (-\infty, T] \rightarrow (0, \infty)$ – неперервна функція така, що $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

Рівняння (1) є рівнянням Колмогорова дифузійного процесу Уленбека – Орнштейна [1, с.165]. Це рівняння є параболічним рівнянням другого порядку, коефіцієнт при похідній першого порядку по x якого необмежено зростає при $x \rightarrow \infty$. Воно характерне тим, що для нього вдається знайти явні формули для фундаментального розв'язку задачі Коші [1, с.166-167], а також для елементів вектор-функцій Гріна основних крайових задач із звичайною початковою умовою і крайовими умовами при $x = 0$ [2].

Задачі, які розглядаються в статті, є задачами Діріхле і Неймана без початкових умов. Такі задачі виникають, коли якийсь процес вивчається в моменти часу, досить віддалені від початкового моменту, і тоді вплив початкових даних практично не позначається на поведінці відповідної функції в момент спостереження. Розглянуті в

статті задачі без початкової умови містять ще виродження при $t \rightarrow -\infty$.

1. Розглянемо задачу про знаходження розв'язку u рівняння (1), який задовольняє одну з таких крайових умов:

$$B_i u(t, x) |_{x=0} = g_i(t), \quad t \in (-\infty, T], \quad i = 1, 2, \quad (2_i)$$

де $B_1 u \equiv u$, а $B_2 u \equiv \partial_x u$. Метою статті є знаходження формул для розв'язків задач (1), (2_i), $i = 1, 2$.

Нехай $A(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$, $\rho(t, x; \tau, \xi) \equiv (1 - e^{-2A(t, \tau)})^{-1} (x - e^{-A(t, \tau)} \xi)^2$, c – фіксована стала з проміжку $(0, \frac{1}{2})$, a – задана невід'ємна стала. Розглянемо функцію

$$k(t, a) \equiv cae^{-2A(T, t)} (c + a(1 - e^{-2A(T, t)}))^{-1}, \quad t \leq T. \quad (3)$$

Дослідивши на максимум функцію $f(\xi) \equiv -c\rho(t, x; \tau, \xi) + k(\tau, a)\xi^2$, $\xi \in \mathbb{R}$, легко переконатися, що функція (3) має таку властивість:

$$\forall \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}, \quad \forall \{\tau, t\} \subset (-\infty, T], \quad \tau < t: \\ -c\rho(t, x; \tau, \xi) + k(\tau, a)\xi^2 \leq k(t, a)x^2. \quad (4)$$

Для неперервної функції u будемо вважати

$$||u(t, \cdot)||^{k(t, a)} \equiv$$

$$\equiv \sup_{x \in [0, \infty)} (|u(t, x)| \exp\{-k(t, a)x^2\}), \quad -\infty < \tau < t \leq T, \quad x > 0, \quad \xi > 0, \quad i = 1, 2. \quad (10_i)$$

$$t \in (-\infty, T],$$

і сформулюємо основний результат статті.

Теорема. Нехай неперервні функції f і g_i , $i = 1, 2$, задовольняють такі умови:

$$\exists C_1 > 0 \forall t \leq T: \|f(t, \cdot)\|^{k(t, a)} \leq C_1 \exp\{-A(T, t)\}\eta(t), \quad (5)$$

$$\exists C_2 > 0 \forall t \leq T: |g_i(t)| \leq C_2 \exp\{-iA(T, t)\}, \quad i = 1, 2, \quad (6_i)$$

де функція η така, що $\int_{-\infty}^T \frac{\eta(t)}{\alpha(t)} dt < \infty$. Тоді всякий розв'язок u_i задачі (1), (2_i), $i = 1, 2$, який задовольняє умову

$$\exists C_3 > 0 \forall t \leq T:$$

$$\|u_i(t, \cdot)\|^{k(t, a)} \leq C_3 \exp\{-A(T, t)\}\varepsilon(t), \quad (7_i)$$

де $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, зображується у вигляді

$$u_i(t, x) = \int_{-\infty}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_0^\infty G_{i0}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^t G_{i1}(t, x; \tau) g_i(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad (t, x) \in Q_{-\infty}. \quad (8_i)$$

Функції G_{i0} і G_{i1} , $i = 1, 2$, визначаються такими формулами:

$$G_{i0}(t, x; \tau, \xi) \equiv (2\pi(1 - e^{-2A(t, \tau)}))^{-1/2} \times \left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\rho(t, x; \tau, \xi)\right\} + (-1)^i \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\rho(t, x; \tau, -\xi)\right\} \right), \quad (9_i)$$

$$G_{i1}(t, x; \tau) \equiv (-1)^{i+1} 2^{1/2} (xe^{-A(t, \tau)})^{2-i} \times (\pi^{1/2}(1 - e^{-2A(t, \tau)})^{1+\frac{(-1)^{i+1}}{2}})^{-1} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\rho(t, x; \tau, 0)\right\},$$

Зауваження. З формул (9_i) і (10_i) легко випливають рівності

$$G_{i1}(t, x; \tau) = -\partial_\xi^{2-i} G_{i0}(t, x; \tau, \xi) |_{\xi=0}, \quad -\infty < \tau < t \leq T, \quad x > 0, \quad i = 1, 2.$$

Вектор-функції (G_{i0}, G_{i1}) природно назвати вектор-функціями Гріна задач (1), (2_i), $i = 1, 2$.

Доведення теореми проводиться в наступних пунктах.

2. Нехай $t_0 < T$, $Q_{t_0} \equiv \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t_0 < t \leq T, x > 0\}$ та i – одне з чисел 1 або 2. Розв'язок u_i задачі (1), (2_i) є, очевидно, розв'язком у Q_{t_0} крайової задачі (1), (2_i) з початковою умовою

$$u_i(t, x) |_{t=t_0} = \varphi_i(x), \quad x > 0, \quad (11_i)$$

де

$$\varphi_i(x) \equiv u_i(t_0, x), \quad x > 0. \quad (12_i)$$

Тому спочатку розглянемо задачу (1), (2_i), (11_i) і зведемо її до задачі, для якої компоненти вектор-функції Гріна відомі. Для цього в задачі (1), (2_i), (11_i) здійснимо заміну, поставивши у відповідність змінній t змінну β за допомогою формули

$$\beta = A(t, t_0), \quad (13)$$

так що $t = A^{-1}(\beta, t_0) \equiv \Phi(\beta)$. Змінний τ відповідатиме змінна γ згідно з формулою

$$\gamma = A(\tau, t_0). \quad (14)$$

Зауважимо, що зміні t на $[t_0, T]$ відповідає зміна β на $[0, B]$, де $B \equiv A(T, t_0)$.

У результаті заміни (13) задача (1), (2_i), (11_i) перейде в задачу

$$\tilde{L}\tilde{u}_i(\beta, x) \equiv (\partial_\beta - \partial_x^2 - x\partial_x - 1)\tilde{u}_i(\beta, x) = \tilde{f}(\beta, x), \quad (\beta, x) \in \tilde{Q}, \quad (15_i)$$

$$\tilde{u}_i(\beta, x) |_{\beta=0} = \varphi_i(x), \quad x > 0, \quad (16_i)$$

$$B_i \tilde{u}_i(\beta, x) |_{x=0} = \tilde{g}_i(\beta), \quad \beta \in (0, B], \quad (17_i)$$

а нерівності з (4), (5), (6_i), (7_i) для $t \in [t_0, T]$
– відповідно в нерівності

$$\forall \{x, \xi\} \subset \mathbb{R} \quad \forall \{\gamma, \beta\} \subset [0, B], \quad \gamma < \beta : \\ -c\tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi) + \tilde{k}(\gamma, a)\xi^2 \leq \tilde{k}(\beta, a)x^2, \quad (18)$$

$$\exists C_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \forall \beta \in [0, B] :$$

$$\|\tilde{f}(\beta, \cdot)\|^{\tilde{k}(\beta, a)} \leq C_1 \exp\{-B + \beta\} \tilde{\eta}(\beta), \quad (19)$$

$$|\tilde{g}_i(\beta)| \leq C_2 \exp\{-i(B - \beta)\}, \quad (20_i)$$

$$\|\tilde{u}_i(\beta, \cdot)\|^{\tilde{k}(\beta, a)} \leq C_3 \exp\{-B + \beta\} \tilde{\varepsilon}(\beta), \quad (21_i)$$

де використані такі позначення:

$$\tilde{u}_i(\beta, x) \equiv u_i(\Phi(\beta), x),$$

$$\tilde{f}(\beta, x) \equiv f(\Phi(\beta), x), \quad \tilde{g}_i(\beta) \equiv g_i(\Phi(\beta)),$$

$$\tilde{Q} \equiv \{(\beta, x) \in \mathbb{R}^2 | 0 < \beta \leq B, x > 0\},$$

$$\tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi) \equiv (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} (x - e^{-(\beta-\gamma)} \xi)^2,$$

$$\tilde{k}(\beta, a) \equiv cae^{-2(B-\beta)} (c + a(1 - e^{-2(B-\beta)}))^{-1},$$

$$\tilde{\eta}(\beta) \equiv \eta(\Phi(\beta)), \quad \tilde{\varepsilon}(\beta) \equiv \varepsilon(\Phi(\beta)).$$

Легко переконатися, що для функції $\tilde{k}$ справджується нерівність

$$\tilde{k}(\beta - \gamma, \tilde{k}(\gamma, a)) \leq \tilde{k}(\beta, a), \quad 0 \leq \gamma \leq \beta \leq B.$$

3. Доведемо, що за умов (19), (20_i) та (21_i) розв'язок задачі (15_i) – (17_i) зображується у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\beta, x) = & \int_0^\beta d\gamma \int_0^\infty \tilde{G}_{i0}(\beta, x; \gamma, \xi) \tilde{f}(\gamma, \xi) d\xi + \\ & + \int_0^\beta \tilde{G}_{i1}(\beta, x; \gamma) \tilde{g}_i(\gamma) d\gamma + \\ & + \int_0^\infty \tilde{G}_{i0}(\beta, x; 0, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi, \\ & (\beta, x) \in \tilde{Q}, \end{aligned} \quad (22_i)$$

де, згідно з [2],

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{i0}(\beta, x; \gamma, \xi) \equiv & (2\pi(1 - e^{-2(\beta-\gamma)}))^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left(\exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi) \right\} + (-1)^i \times \right. \end{aligned}$$

$$\left. \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, -\xi) \right\} \right), \quad (23_i)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{i1}(\beta, x; \gamma) \equiv & (-1)^{i+1} 2^{1/2} (xe^{-(\beta-\gamma)})^{2-i} \times \\ & \times (\pi^{1/2} (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{1+(-1)^{i+1/2}})^{-1} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, 0) \right\}, \end{aligned} \quad (24_i)$$

$$0 \leq \gamma < \beta \leq B, \quad x > 0, \quad \xi > 0.$$

Оскільки доведення формули (22_i) для $i = 1$ та $i = 2$ аналогічні, то для визначеності розглянемо випадок $i = 1$.

Візьмемо функцію θ з простору $C^\infty([0, \infty))$ таку, що $\theta = 1$ на $[0, 1/2]$, $\theta = 0$ на $[3/4, \infty)$ і $\theta' < 0$, та фіксовану точку $(\beta, x) \in (0, B) \times (0, \bar{R}/4]$, де $\bar{R} > 0$. Скористаємось такою формулою Гріна-Остроградського:

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\gamma \int_0^R (v\tilde{L}u - u\tilde{L}^*v)(\gamma, \xi) d\xi = \\ & = \int_0^R u(\beta_2, \xi) v(\beta_2, \xi) d\xi - \int_0^R u(\beta_1, \xi) v(\beta_1, \xi) d\xi - \\ & - \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\xi(uv)(\gamma, \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=R} d\gamma - \\ & - \int_{\beta_1}^{\beta_2} (v\partial_\xi u - u\partial_\xi v)(\gamma, \xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=R} d\gamma, \end{aligned} \quad (25)$$

де $\tilde{L}$ – диференціальний вираз з (15_i),

$$\tilde{L}^* \equiv -\partial_\gamma - \partial_\xi^2 + \xi\partial_\xi, \quad \beta_1 < \beta_2, \quad R > 0.$$

Формула (25) одержується, якщо проінтегрувати за змінною γ по $[\beta_1, \beta_2]$ і за змінною ξ по $[0, R]$ обидві частини тотожності

$$\begin{aligned} (v\tilde{L}u - u\tilde{L}^*v)(\gamma, \xi) = & \partial_\gamma(uv)(\gamma, \xi) - \\ & - \partial_\xi(\xi uv)(\gamma, \xi) - \partial_\xi(v\partial_\xi u - u\partial_\xi v)(\gamma, \xi). \end{aligned}$$

У формулі (25) покладемо замість β_1 , β_2 , $v(\gamma, \xi)$ і $u(\gamma, \xi)$ відповідно ε , $\beta - h$,

$\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi)\theta\left(\frac{\xi}{R}\right)$ і $\tilde{u}_1(\gamma, \xi)$, де $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\beta$, $0 < h < \frac{1}{2}\beta$, $R \geq \bar{R}$, $\tilde{G}_{10}$ визначається формулою (23₁), а $\tilde{u}_1$ – взятий нами розв'язок задачі (15₁) – (17₁).

Оскільки

$$(\tilde{L}\tilde{u}_1)(\gamma, \xi) = \tilde{f}(\gamma, \xi), \quad (\gamma, \xi) \in \tilde{Q};$$

$$\tilde{u}_1(\gamma, \xi) \big|_{\xi=0} = \tilde{g}_1(\gamma), \quad \gamma \in (0, B];$$

$$\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \big|_{\xi=0} = 0, \quad \gamma < \beta, \quad x > 0,$$

то на підставі формули (25), властивостей функції θ та рівності

$$\partial_\xi \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \big|_{\xi=0} = -\tilde{G}_{11}(\beta, x; \gamma),$$

$$\gamma < \beta, \quad x > 0,$$

яка впливає з явних виразів для $\tilde{G}_{10}$ та $\tilde{G}_{11}$, одержимо

$$\begin{aligned} & \int_0^R \tilde{G}_{10}(\beta, x; \beta - h, \xi) \theta\left(\frac{\xi}{R}\right) \tilde{u}_1(\beta - h, \xi) d\xi = \\ & = \int_0^R \tilde{G}_{10}(\beta, x; \varepsilon, \xi) \theta\left(\frac{\xi}{R}\right) \tilde{u}_1(\varepsilon, \xi) d\xi + \\ & + \int_\varepsilon^{\beta-h} \tilde{G}_{11}(\beta, x; \gamma) \tilde{g}_1(\gamma) d\gamma + \\ & + \int_\varepsilon^{\beta-h} d\gamma \int_0^R \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \theta\left(\frac{\xi}{R}\right) \tilde{f}(\gamma, \xi) d\xi - \\ & - \int_\varepsilon^{\beta-h} d\gamma \int_0^R \tilde{L}^* \left(\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \theta\left(\frac{\xi}{R}\right) \right) \times \\ & \times \tilde{u}_1(\gamma, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Після переходу в цій рівності до границі при $h \rightarrow 0$ і використання властивості однорідної функції Гріна прийдемо до рівності

$$\tilde{u}_1(\beta, x) =$$

$$\begin{aligned} & = \int_\varepsilon^\beta d\gamma \int_0^R \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \theta\left(\frac{\xi}{R}\right) \tilde{f}(\gamma, \xi) d\xi + \\ & + \int_\varepsilon^\beta \tilde{G}_{11}(\beta, x; \gamma) \tilde{g}_1(\gamma) d\gamma + \\ & + \int_0^R \tilde{G}_{10}(\beta, x; \varepsilon, \xi) \theta\left(\frac{\xi}{R}\right) u_1(\varepsilon, \xi) d\xi - \\ & - \int_\varepsilon^\beta d\gamma \int_0^R \tilde{L}^* \left(\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \theta\left(\frac{\xi}{R}\right) \right) \times \\ & \times \tilde{u}_1(\gamma, \xi) d\xi \equiv I_1^{(R)} + I_2 + I_3^{(R)} + I_4^{(R)}. \quad (26) \end{aligned}$$

Перейдемо в (26) до границі при $R \rightarrow \infty$. Візьмемо

$$I_1 \equiv \int_\varepsilon^\beta d\gamma \int_0^\infty \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \tilde{f}(\gamma, \xi) d\xi$$

і оцінимо різницю

$$\begin{aligned} |I_1 - I_1^{(R)}| &= \left| \int_\varepsilon^\beta d\gamma \int_R^\infty \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \tilde{f}(\gamma, \xi) \times \right. \\ & \times \left. \left(1 - \theta\left(\frac{\xi}{R}\right) \right) d\xi \right|, \end{aligned}$$

використовуючи оцінку

$$\begin{aligned} |\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi)| &\leq 2^{1/2} (\pi(1 - e^{-2(\beta-\gamma)}))^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi) \right\}, \quad (27) \end{aligned}$$

яка впливає з явного виразу для $\tilde{G}_{10}$ і того, що для $x > 0$ і $\xi > 0$

$$(x + e^{-(\beta-\gamma)}\xi)^2 \geq (x - e^{-(\beta-\gamma)}\xi)^2.$$

За допомогою нерівностей (18), (19) і (27) маємо

$$|I_1 - I_1^{(R)}| \leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\varepsilon}^{\beta} d\gamma \int_0^{\infty} \exp\{-c\tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi) + \tilde{k}(\gamma, a)\xi^2\} \times \\ & \times \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - c\right) \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi)\right\} (|\tilde{f}(\gamma, \xi)| \times \\ & \times \exp\{-\tilde{k}(\gamma, a)\xi^2\})(1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2} d\xi \leq \\ & \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} C_1 \exp\{k(\beta, a)x^2\} \times \\ & \times \int_{\varepsilon}^{\beta} \exp\{-B + \gamma\} \tilde{\eta}(\gamma) d\gamma \int_{R/2}^{\infty} (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2} \times \\ & \times \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - c\right) \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi)\right\} d\xi \rightarrow 0, \\ & R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

бо

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - c\right) \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi)\right\} \times \\ & \times (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2} d\xi = \left(\frac{1}{2} - c\right)^{-1/2} \sqrt{\pi} e^{\beta-\gamma}. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогічно з використанням нерівностей (18), (21₁) і (27) доводиться, що

$$I_3^{(R)} \rightarrow \int_0^{\infty} \tilde{G}_{10}(\beta, x; \varepsilon, \xi) \tilde{u}_1(\varepsilon, \xi) d\xi, \quad R \rightarrow \infty.$$

Тепер доведемо, що $I_4^{(R)} \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$. Для цього зауважимо, що

$$\begin{aligned} & \tilde{L}^* \left(\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) \right) = \\ & = (\tilde{L}^* \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi)) \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) - \\ & - \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \partial_{\xi}^2 \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) - \\ & - 2 \partial_{\xi} \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \partial_{\xi} \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) + \\ & + \xi \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \partial_{\xi} \theta \left(\frac{\xi}{R} \right). \end{aligned}$$

За допомогою формули (23₁) легко перевірити правильність рівності $\tilde{L}^* \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) = 0$. Врахувавши це і властивості функції θ , дістанемо, що $\tilde{L}^* (\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \theta(\frac{\xi}{R})) = 0$ для $\xi \in [0, \frac{1}{2}R] \cup [\frac{3}{4}R, \infty)$. Використовуючи нерівності

$$\left| \partial_{\xi} \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) \right| \leq \frac{C}{R}, \quad \left| \partial_{\xi}^2 \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) \right| \leq \frac{C}{R^2},$$

$$\left| \xi \partial_{\xi} \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) \right| \leq \frac{C}{R} \xi,$$

оцінку (27) та оцінку

$$\begin{aligned} & \left| \partial_{\xi} \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \right| = \\ & = \left| (2\pi(1 - e^{-2(\beta-\gamma)}))^{-1/2} e^{-(\beta-\gamma)} \times \right. \\ & \times (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} \left(\exp\left\{-\frac{1}{2} \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi)\right\} \times \right. \\ & \times (x - e^{-(\beta-\gamma)}\xi) + \exp\left\{-\frac{1}{2} \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, -\xi)\right\} \times \\ & \times (x + e^{-(\beta-\gamma)}\xi) \left. \right) \left. \right| \leq C(1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + c\right) \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi)\right\}, \end{aligned}$$

при $R \geq 1$ маємо

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{L}^* \left(\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) \right) \right| \leq \\ & \leq C(1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + c\right) \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi)\right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

За допомогою (18), (21₁), (28), (29) і нерівності

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi) \geq (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} (\xi - e^{\beta-\gamma}x)^2 \times \\ & \times e^{-2(\beta-\gamma)} \geq (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} \left(\frac{1}{2}R - e^B \frac{\bar{R}}{4} \right)^2 \times \\ & \times e^{-2B} \geq \frac{1}{16} e^{-2B} (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} R^2, \\ & x \in \left(0, \frac{\bar{R}}{4} \right], \quad \xi \in \left[\frac{R}{2}, \infty \right), \\ & 0 \leq \gamma < \beta \leq B, \quad 0 < \bar{R} \leq e^{-B} R, \end{aligned}$$

маємо

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{R/2}^{3R/4} \tilde{L}^* \left(\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \theta \left(\frac{\xi}{R} \right) \right) \tilde{u}_1(\gamma, \xi) d\xi \right| \leq \\
 & \leq C(1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} \int_{R/2}^{3R/4} \exp\{-c\tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi) + \\
 & + \tilde{k}(\gamma, a)\xi^2\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - c\right)\tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi)\right\} \times \\
 & \quad \times (|\tilde{u}_1(\gamma, \xi)| \exp\{-\tilde{k}(\gamma, a)\}) d\xi \leq \\
 & \leq C \|\tilde{u}_1(\gamma, \cdot)\|^{\tilde{k}(\gamma, a)} \exp\left\{-\frac{1}{64}\left(\frac{1}{2} - c\right)\right\} \times \\
 & \quad \times e^{-2B}(1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} R^2 + \\
 & \quad + \tilde{k}(\beta, a)x^2\} (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2} \times \\
 & \quad \times \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - c\right)\tilde{\rho}(\beta, x; \gamma, \xi)\right\} \times \\
 & \quad \times (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2} d\xi \leq \\
 & \leq C \exp\{\tilde{k}(\beta, a)x^2 - \delta(1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} R^2\} \times \\
 & \times (1 - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1/2} \leq \frac{C}{R} \exp\{\tilde{k}(\beta, a)x^2 - \delta_0(1 - \\
 & - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} R^2\} \leq C \exp\{\tilde{k}(\beta, a)x^2 - \delta_0(1 - \\
 & - e^{-2(\beta-\gamma)})^{-1} R^2\}, \quad 0 \leq \gamma < \beta \leq B, \quad R \geq 1, \\
 & \text{де } 0 < \delta_0 < \delta \equiv \frac{1}{64} \left(\frac{1}{2} - c\right). \text{ Звідси випливає,} \\
 & \text{що} \\
 & \left| I_4^{(R)} \right| \leq C \exp\{\tilde{k}(\beta, a)x^2 - \\
 & - \delta_0(1 - e^{-2(\beta-\varepsilon)})^{-1} R^2\} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Отже, після переходу в (26) до границі при $R \rightarrow \infty$ одержимо

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_1(\beta, x) = & \int_{\varepsilon}^{\beta} d\gamma \int_0^{\infty} \tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) \tilde{f}(\gamma, \xi) d\xi + \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\beta} \tilde{G}_{11}(\beta, x; \gamma) \tilde{g}_1(\gamma) d\gamma + \\
 & + \int_0^{\infty} \tilde{G}_{10}(\beta, x; \varepsilon, \xi) \tilde{u}_1(\varepsilon, \xi) d\xi. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Тепер у рівності (30) перейдемо до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$. На підставі формул (23₁) і (24₁) та умов (19) і (20₁) легко переконатись, що границями перших двох доданків з (30) є відповідні доданки з формули (22₁). Доведемо, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ третій доданок з (30) прямує до третього доданка з (22₁). Для цього відзначимо, що

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{G}_{10}(\beta, x; \varepsilon, \xi) \tilde{u}_1(\varepsilon, \xi)) = \\
 & = \tilde{G}_{10}(\beta, x; 0, \xi) \varphi_1(\xi), \quad \xi > 0,
 \end{aligned}$$

і правильна нерівність

$$\begin{aligned}
 & |\tilde{G}_{10}(\beta, x; \varepsilon, \xi) \tilde{u}_1(\varepsilon, \xi)| \leq C(1 - e^{-2(\beta-\varepsilon)})^{-1} \times \\
 & \times \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - c\right)\tilde{\rho}(\beta, x; \varepsilon, \xi)\right\} \times \\
 & \times \exp\{-c\tilde{\rho}(\beta, x; \varepsilon, \xi) + \tilde{k}(\varepsilon, a)\xi^2\} \times \\
 & \times (|\tilde{u}_1(\varepsilon, \xi)| \exp\{-\tilde{k}(\varepsilon, a)\xi^2\}) \leq \\
 & \leq C(1 - e^{-2(\beta-\varepsilon)})^{-1} \times \\
 & \times \exp\{-B + \beta\}\tilde{\varepsilon}(\beta) \exp\{\tilde{k}(\beta, a)x^2\} \times \\
 & \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - c\right)\right\} \times \\
 & \times (e^{-2\beta}\xi^2 - 2x^2)(1 - e^{-2\beta})^{-1}\} \leq \\
 & \leq C \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - c\right)\right\} \times \\
 & \times (e^{-2\beta}\xi^2 - 2x^2)(1 - e^{-2\beta})^{-1}\} \times
 \end{aligned}$$

$$\times (1 - e^{-2\beta})^{-1/2} \exp\{\tilde{k}(\beta, a)x^2\},$$

яка одержана на підставі (18), (21₁), (27) і того, що

$$(x - e^{-(\beta-\varepsilon)}\xi)^2 \geq \frac{1}{2}e^{-2(\beta-\varepsilon)}\xi^2 - x^2 \geq \frac{1}{2}e^{-2\beta}\xi^2 - x^2.$$

Згідно з теоремою Лебега про обмежену збіжність, у третьому доданку з (30) можна переходити до границі під знаком інтеграла.

Таким чином, зображення (22₁) одержано.

Враховуючи те, що для задачі Неймана

$$\tilde{G}_{10}(\beta, x; \gamma, \xi) |_{\xi=0} = -\tilde{G}_{11}(\beta, x; \gamma), \\ \gamma < \beta, \quad x > 0,$$

аналогічними міркуваннями доводиться правильність зображення (22₂).

4. Повернемось до задач (1), (2_i), (11_i), $i = 1, 2$, враховуючи те, що $u_i(t, x) = \tilde{u}_i(\beta, x) |_{\beta=A(t, t_0)}$.

З рівностей (22_i), $i = 1, 2$, беручи до уваги (13) і (14), одержуємо таке зображення для розв'язків u_i задач (1), (2_i), (11_i):

$$u_i(t, x) = \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_0^\infty G_{i0}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \\ + \int_{t_0}^t G_{i1}(t, x; \tau) g_i(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} + \\ + \int_0^\infty G_{i0}(t, x; t_0, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q_{t_0}, i = 1, 2, \quad (31_i)$$

де $G_{i0}(t, x; \tau, \xi) \equiv \tilde{G}_{i0}(A(t, t_0), x; A(\tau, t_0), \xi)$,

$$G_{i1}(t, x; \tau) \equiv \tilde{G}_{i1}(A(t, t_0), x; A(\tau, t_0)). \quad (32_i)$$

З (23_i), (24_i) і (32_i) випливають формули (9_i) і (10_i).

5. Перейдемо до останнього пункту доведення теореми. Формула (31_i) з урахуванням (12_i) дає зображення розв'язку задачі (1), (2_i) в Q_{t_0} . Перейшовши в (31_i) до границі при $t_0 \rightarrow -\infty$, одержимо зображення (8_i). Умови теореми при цьому гарантують існування границь відповідних інтегралів з (31_i). Переконаємось у цьому, наприклад, для випадку $i = 1$.

Запровадимо такі позначення:

$$I_{t_0} \equiv \int_{t_0}^t G_{11}(t, x; \tau) g_1(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)},$$

$$J_{t_0} \equiv \int_0^\infty G_{10}(t, x; t_0, \xi) u_1(t_0, \xi) d\xi,$$

$$H_{t_0} \equiv \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_0^\infty G_{10}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Доведемо, що при $t_0 \rightarrow -\infty$ $I_{t_0} \rightarrow I_{-\infty}$, де

$$I_{-\infty} \equiv \int_{-\infty}^t G_{11}(t, x; \tau) g_1(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}.$$

На підставі (6₁) і (10₁) маємо

$$|I_{-\infty} - I_{t_0}| \leq C e^{-A(T, t)} \int_{-\infty}^{t_0} x e^{-2A(t, \tau)} \times$$

$$\times (1 - e^{-2A(t, \tau)})^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\rho(t, x; \tau, 0)\right\} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}.$$

Здійснимо заміну змінної інтегрування τ за допомогою формули $z = \rho^{1/2}(t, x; \tau, 0)$ і візьмемо

$$c(x, t_0) \equiv x(1 - e^{-2A(t, t_0)})^{-1/2}. \quad (33)$$

Тоді

$$|I_{-\infty} - I_{t_0}| \leq \\ \leq 2\pi^{-1/2} C_1 \int_{c(x, -\infty)}^{c(x, t_0)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \rightarrow 0, \quad t_0 \rightarrow -\infty.$$

Отже, $I_{t_0} \rightarrow I_{-\infty}$, якщо $t_0 \rightarrow -\infty$ і виконується умова (6₁).

Розглянемо інтеграл J_{t_0} . Використовуючи формулу (9₁), умову (7₁) та нерівність (4), одержуємо

$$|J_{t_0}| \leq C\varepsilon(t_0) \exp\{k(t, a)x^2\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^\infty e^{-A(T,t_0)} (1 - e^{-2A(t,t_0)})^{-1/2} \times \\ & \times \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} - c \right) \rho(t, x; t_0, \xi) \right\} d\xi. \\ & \leq C \exp \{ k(t, a) x^2 - A(T, t) \} \int_{-\infty}^{t_0} \frac{\eta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \times \\ & \times \int_{-\infty}^{c(x, \tau)} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} - c \right) z^2 \right\} dz \leq \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінної інтегрування ξ за допомогою формули

$$z = (1 - e^{-2A(t,t_0)})^{-1/2} (x - e^{-A(t,t_0)} \xi). \quad (34)$$

Враховуючи (33), маємо

$$\begin{aligned} |J_{t_0}| & \leq C \varepsilon(t_0) \exp \{ k(t, a) x^2 - A(T, t) \} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{c(x, t_0)} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} - c \right) z^2 \right\} dz \rightarrow 0, t_0 \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

бо $\varepsilon(t_0) \rightarrow 0$ при $t_0 \rightarrow -\infty$, а $\int_{-\infty}^{c(x, t_0)} \exp \{ -(\frac{1}{2} - c) z^2 \} dz < \infty$. Отже, $J_{t_0} \rightarrow 0$ при $t_0 \rightarrow -\infty$, якщо виконується умова (7₁).

Розглянемо, нарешті, інтеграл H_{t_0} і доведемо, що при $t_0 \rightarrow -\infty$ $H_{t_0} \rightarrow H_{-\infty}$, де $H_{-\infty} \equiv \int_{-\infty}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_0^\infty G_{10}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi$. За допомогою формули (9₁), нерівностей (4) і (5) маємо

$$\begin{aligned} |H_{-\infty} - H_{t_0}| & \leq C \exp \{ k(t, a) x^2 \} \int_{-\infty}^{t_0} \frac{\eta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \times \\ & \times \int_0^\infty (1 - e^{-2A(t, \tau)})^{-1/2} \times \\ & \times \exp \left\{ -A(T, \tau) - \left(\frac{1}{2} - c \right) \rho(t, x; \tau, \xi) \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Якщо здійснити заміну змінної інтегрування ξ за формулою, яка відрізняється від (34) лише заміною t_0 на τ , то одержимо

$$|H_{-\infty} - H_{t_0}| \leq$$

$$\leq C \exp \{ k(t, a) x^2 - A(T, t) \} \int_{-\infty}^{t_0} \frac{\eta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \rightarrow 0,$$

$t_0 \rightarrow -\infty$, бо за умовою інтеграл $\int_{-\infty}^T \frac{\eta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau$ збігається. Отже, $H_{t_0} \rightarrow H_{-\infty}$ при $t_0 \rightarrow -\infty$.

Зауваження. Умови доведеної теореми є істотними для правильності твердження цієї теореми. Про це частково свідчить приклад, наведений в [3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения.— М.: Наука, 1969.— 511с.
2. Березан Л.П., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Вектор-функції Гріна деяких параболічних крайових задач для рівнянь другого порядку.— Чернівець. ун-т.— Чернівці, 1996.— 34с.— Деп. в ДНТБ України 08.04.96, N904—Ук96.
3. Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д. Крайова задача Діріхле без початкової умови для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека-Орнштейна з виродженням // Дослідження математичних моделей: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 1997.— С.21—29.