

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО МАЙЖЕ ГЕОДЕЗІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ В КЛАСІ НАПІВСИМЕТРИЧНИХ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

Встановлено умови, за яких напівсиметричний псевдоріманів простір V_n допускає частково зведене майже геодезійне відображення на деякий напівсиметричний псевдоріманів простір $\bar{V}_n$.

It is obtained conditions in which semi-symmetric pseudo-Rieman space V_n admits reduced mapping on some semi-symmetric pseudo-Rieman space $\bar{V}_n$.

Напівсиметричними М.С.Синюков назвав псевдоріманові простори, для яких альтернувана друга коваріантна похідна тензора кривини дорівнює нулеві:

$$R_{ijk,[lm]}^h = 0.$$

Тут і далі квадратні дужки означають альтернування за вказаними індексами. За допомогою тотожності Річчі ця умова зводиться до вигляду

$$R_{\alpha jk}^h R_{ilm}^\alpha + R_{iak}^h R_{jlm}^\alpha + R_{ij\alpha}^h R_{klm}^\alpha - R_{ijk}^\alpha R_{alm}^h = 0. \quad (1)$$

Співвідношення (1) відіграє вирішальну роль у теорії симетричних просторів. Напівсиметричні простори природно виникають у теорії геодезійних відображень. Клас напівсиметричних просторів істотно ширший, ніж клас симетричних просторів.

Узагальнюючи геодезійні відображення, М.С.Синюков прийшов до майже геодезійних відображень (МГВ), які в спільній за відображенням системі координат характеризуються такими рівняннями [1]:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \psi_{(i)} \delta_{(j)}^h + \sigma_{(i)} F_{(j)}^h, \quad (2)$$

$$F_{(i,j)}^h + \sigma_{(i)} F_{(j)}^\alpha F_\alpha^h = \nu_{(i)} \delta_{(j)}^h + \mu_{(i)} F_{(j)}^h, \quad (3)$$

де $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ і Γ_{ij}^h – символи Кристофеля псевдоріманових просторів V_n і $\bar{V}_n$, ψ_i , σ_i , ν_i , μ_i – деякі вектори, F_h^α – афінор, який задає

МГВ, кома – знак коваріантної похідної у V_n , круглі дужки означають симетризування за вказаними індексами.

Ми називали МГВ приведеним [2], якщо афінор F_i^h визначає структуру майже добутку або майже комплексну структуру:

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = e \delta_i^h, \quad e = \pm 1; \quad (4)$$

вектори ψ_i і σ_i градієнтні:

$$\psi_i = \psi_{,i}, \quad \sigma_i = \sigma_{,i} \quad (5)$$

і виконана умова

$$\sigma_{i,j} = F_{ij} + \sigma_{(i)} F_{(j)}^\alpha \sigma_\alpha, \quad (6)$$

де $F_{ij} = F_i^\alpha g_{\alpha j}$, g_{ij} – метричний тензор простору V_n .

Із (5) знаходимо $\sigma_{i,j} = \sigma_{,ij}$, тобто тензор $\sigma_{i,j}$ є симетричним. Тому з (6) випливає, що F_{ij} – симетричний тензор:

$$F_{[ij]} = 0. \quad (7)$$

З (3), (4) і (7) знаходимо, що афінор F_i^h абсолютно паралельний:

$$F_{i,j}^h = 0. \quad (8)$$

Тут ми розглядаємо МГВ, яке задовольняє умови (4) і (5), а умова (6) замінюється слабкішою умовою (7). І в цьому випадку виконується умова (8). Таке МГВ називаємо частково зведеним.

Розглянемо частково зведене МГВ напівсиметричного псевдоріманового простору V_n на напівсиметричний псевдоріманів простір $\bar{V}_n$. Із рівняння (2), враховуючи умови частково зведеного МГВ, знаходимо зв'язок між тензорами кривини просторів V_n і $\bar{V}_n$:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \psi_{i[j} \delta_{k]}^h + \sigma_{i[j} F_{k]}^h, \quad (9)$$

де ψ_{ij} і σ_{ij} – деякі симетричні тензори, які виражаються через вектори ψ_i і σ_i , а також через афінор F_i^h .

Якщо в умову напівсиметричності простору $\bar{V}_n$, аналогічну умові (1), замість тензора кривини $\bar{R}_{ijk}^h$ підставити його вираз із (9) і врахувати, що V_n теж напівсиметричний, то одержимо таке рівняння:

$$\begin{aligned} & [R_{hmkj} \psi_{il} + \psi_{m\alpha} R_{mj\alpha}^{\alpha} g_{hl} + R_{h\bar{m}jk} \sigma_{il} + \\ & + \sigma_{m\alpha} R_{ij\alpha}^{\alpha} F_{hl}]_{[lm]} + [R_{himk} \psi_{jl} + \\ & + R_{h\bar{i}mk} \sigma_{jl} + \psi_{\alpha(i)} R_{(j)lm}^{\alpha} g_{hk} + \\ & + \sigma_{\alpha(i)} R_{(j)lm}^{\alpha} F_{hk}]_{[jk]} + [b_{\bar{m}(i)} \sigma_{(j)l} g_{hk} + b_{\bar{k}m} \sigma_{ij} g_{hl} - \\ & - b_{m(i)} \sigma_{(j)l} F_{hk} - b_{km} \sigma_{ij} F_{hl}]_{[jk][lm]} = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

де надкреслений індекс означає згортку з афінором F_i^h , наприклад $\sigma_{i\bar{j}} = \sigma_{i\alpha} F_j^{\alpha}$, і позначено $b_{ij} = \psi_{ij} - \sigma_{ij}$, а вирази в квадратних дужках треба проальтернувати за вказаними індексами.

Дослідження умови (10) приводить до такого висновку.

Теорема. *Напівсиметричний псевдоріманів простір V_n допускає частково зведене майже геодезійне відображення на напівсиметричний псевдоріманів простір $\bar{V}_n$ з не виродженим тензором $a_{ij} = (n-1)\psi_{ij} - \sigma_{ij} + F\sigma_{ij}$, де $F = F_{\alpha}^{\alpha}$, тоді і тільки тоді, коли V_n – симетричний простір із спеціальним тензором кривини:*

$$\begin{aligned} R_{hijk} = & [A(g_{ij} F_{hk} + g_{hk} F_{ij}) + \\ & + B(eg_{ij} g_{hk} + F_{ij} F_{hk})]_{[jk]}, \quad (11) \end{aligned}$$

де A і B – сталі.

Зауваження.

1. Симетричні псевдоріманові простори, відмінні від просторів сталої кривини (ПСК), не допускають нетривіальних геодезійних відображень [1], але вони допускають МГВ.

2. Розглядається МГВ, яке не вироджується в геодезійне відображення, тобто припускається, що $\sigma_i \neq 0$ і афінор F_i^h не пропорційний символу Кронекера:

$$F_i^h \neq \rho \delta_i^h. \quad (12)$$

3. У випадку $e = 1$ співвідношення (1), (7), (8) і (12) є необхідними й достатніми умовами звідності псевдоріманового простору V_n [1,3], тобто простір V_n розкладається в добуток підпросторів V_+ і V_- . При цьому на підпросторах V_+ і V_- афінор F_i^h відповідно має вигляд $F_i^h = \delta_i^h$ і $F_i^h = -\delta_i^h$. З (11) випливає, що підпростори V_+ і V_- є ПСК.

4. У випадку $e = -1$ умова (12) зайва, а умови (4), (7) і (8) визначають певну специфіку метричного тензора простору V_n , проте записувати її ми не будемо; скажемо лише, що компоненти метричного тензора задовольняють умови алгебраїчного й диференціального характеру.

Це дослідження ініціював М.С.Синюков. Він мріяв прислужитися розвитку науки незалежної України, проте його планам не судилося здійснитися.

Автор щиро дякує Ю.Ніколаєвському за конструктивні пропозиції, які відображені в зауваженнях 3 і 4.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств.— М.: Наука, 1979.— 256с.
2. Собчук В.С. Почти геодезические отображения римановых пространств на симметрические римановы пространства // Мат. заметки.— 1975.— 17, вып.5.— С.757—763.
3. Широков П.А. Избранные работы по геометрии.— Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1966.— 432 с.