

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено достатні умови існування інтегральних многовидів сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь у вигляді сукупності нерівностей для деяких допоміжних функцій.

The sufficient conditions of existence are established for integral manifolds of the singularly perturbed differential-functional equations as a totality of inequalities for some auxiliary functions.

Метод інтегральних многовидів є ефективним апаратом для дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Умови існування інтегральних многовидів сингулярно збурених звичайних диференціальних рівнянь вивчалися у працях [1,2] та інших, а для сингулярно збурених систем із запізненням - у працях [3–6].

У даній праці досліджено достатні умови існування інтегральних многовидів сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

1. Розглянемо систему сингулярно збурених рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x + f(t, x, y_t, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= L(t, y_t) + g(t, x, y_t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

де $t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m, y_t = y(t + \theta), -\varepsilon\Delta \leq \theta \leq 0, \Delta > 0$.

Припустимо, що для системи (1) виконуються умови:

I) матриця $A(t)$ та лінійний відносно φ функціонал $L(t, \varphi)$ неперервні за t і рівномірно обмежені при $t \in \mathbf{R}$;

II) оператор зсуву $T(t, s)$ за розв'язками рівняння

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = L(t, y_t) \quad (2)$$

задовольняє нерівність

$$|T(t, s)\varphi| \leq N e^{-\beta(t-s)}|\varphi|, \quad N > 0, \beta > 0, t \geq s; \quad (3)$$

III) функції f і g визначені й неперервні в області $\Omega = \{t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, |y| < \rho, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ та задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} |f(t, x, y, \varepsilon)| &\leq a_1, \quad |g(t, x, y, \varepsilon)| \leq a_2, \\ |f(t, x_1, y_1, \varepsilon) - f(t, x_2, y_2, \varepsilon)| &\leq \\ &\leq b_1|x_1 - x_2| + c_1|y_1 - y_2|, \\ |g(t, x_1, y_1, \varepsilon) - g(t, x_2, y_2, \varepsilon)| &\leq \\ &\leq b_2|x_1 - x_2| + c_2|y_1 - y_2|, \end{aligned} \quad (4)$$

де $a_i = a_i(|y|, \varepsilon), b_i = b_i(|y|, \varepsilon), c_i = c_i(|y|, \varepsilon)$ — невід'ємні, неспадні функції змінних $|y|$ і ε .

Система (1) еквівалентна такій системі інтегро-диференціальних рівнянь [7]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x + f(t, x, y_t, \varepsilon), \quad y_t = T(t, \sigma)y_\sigma + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma}^t T(t, s)Y_0 g(s, x, y_s, \varepsilon) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

де $Y_0(\theta) = 0, -\varepsilon\Delta \leq \theta < 0, Y_0(0) = E$, а інтеграл для кожного $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$ розуміємо як інтеграл в $\mathbf{R}^m$.

Означення. Множину точок $M \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times C[-\varepsilon\Delta, 0]$ будемо називати інтегральним многовидом системи (5), якщо для довільної точки $(t_0, x_0, y_{t_0}) \in M$ виконується умова $(t, x(t), y_t) \in M$ для всіх $t \geq t_0$, де $(x(t), y_t)$ — розв'язок системи (5) з початковими умовами (t_0, x_0, y_{t_0}) .

Вивчатимемо інтегральні многовиди повільних змінних системи (5), які описуються рівнянням

$$y_t = h(t, x, \varepsilon), \quad t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \quad (6)$$

Припускатимемо, що функція h — неперервна за t і задовольняє за x умову Ліпшиця

$$|h(t, x_1, \varepsilon) - h(t, x_2, \varepsilon)| \leq \eta |x_1 - x_2|. \quad (7)$$

Якщо, крім того, виконується умова

$$|h(t, x, \varepsilon)| \leq \rho, \quad t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad (8)$$

то інтегральний многовид M , що описується рівнянням (6), будемо називати (ρ, η) —многовидом [3,8].

Якщо на цьому многовиді лежить траєкторія $(t, x(t), y_t)$ системи (5), то $y_t = h(t, x(t), \varepsilon)$. Функції $x(t), y_t = h(t, x(t), \varepsilon)$ задовольняють систему (5). Перше рівняння при цьому набуває вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x + f(t, x, h(t, x, \varepsilon), \varepsilon). \quad (9)$$

Згідно з припущеннями (4), (7), (8) щодо функцій f і h , маємо нерівність

$$|f(t, x_1, h(t, x_1, \varepsilon), \varepsilon) - f(t, x_2, h(t, x_2, \varepsilon), \varepsilon)| \leq [b_1(\rho, \varepsilon) + c_1(\rho, \varepsilon)\eta] |x_1 - x_2|.$$

Отже, рівняння (9) для кожного фіксованого $x_0 \in \mathbf{R}^n$ має єдиний розв'язок $\varphi(t) = \Phi(t, t_0, x_0, \varepsilon, h)$, $\Phi(t_0, t_0, x_0, \varepsilon, h) = x_0$. Функція $y_t = h(t, x(t), \varepsilon)$ є обмеженим на всій осі розв'язком другого рівняння системи (5) і тому повинна задовольняти інтегральне рівняння [7]

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t T(t, s) Y_0 g(s, \varphi(s), y_s, \varepsilon) ds.$$

Для фіксованого t виберемо той розв'язок $\varphi(s)$ рівняння (9), який при $s = t$ дорівнює фіксованому значенню $x(t)$, тобто $\varphi(t) = \Phi(t, s, x, \varepsilon, h)$. Тоді для функції $h(t, x, \varepsilon)$, що визначає (ρ, η) —многовид системи (6), одержуємо рівняння

$$h(t, x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t T(t, s) Y_0 \times$$

$$\times g(s, \varphi(s), h(s, \varphi(s), \varepsilon), \varepsilon) ds. \quad (10)$$

З другого боку, якщо рівняння (10) має розв'язок, що задовольняє умови (7)—(8), то цей розв'язок визначає (ρ, η) —многовид M системи (5). Дійсно, для довільної точки $(t_0, x_0, y_{t_0}) \in M$ маємо $y_{t_0} = h(t_0, x_0, \varepsilon)$ і рівняння (9) має розв'язок $x(t) = \varphi(t) = \Phi(t, t_0, x_0, \varepsilon, h)$ такий, що $x(t_0) = x_0$.

Із співвідношення $\Phi(t, s, \Phi(s, t_0, x_0, \varepsilon, h), \varepsilon, h) = \Phi(t, t_0, x_0, \varepsilon, h)$ і рівності (10) одержуємо, що функція $y_t = h(t, \varphi(t), \varepsilon)$ є розв'язком другого рівняння системи (5).

Таким чином, рівняння (10) можна розглядати як операторне рівняння для знаходження функції $h(t, x, \varepsilon)$.

2. Розглянемо допоміжні нерівності.

Лема 1. *Нехай неперервна додатна на $[t_0 - T, t_0]$ функція $u(t)$ задовольняє нерівність*

$$u(t) \leq f(t) + \int_t^{t_0} [\varphi_1(t) \varphi_2(s) u(s) + \psi(t, s)] ds, \quad (11)$$

де $f(t), \varphi_1(t), \varphi_2(s), \psi(t, s)$ — неперервні, невід'ємні функції для $t_0 - T \leq t \leq s \leq t_0$.

Тоді справджується нерівність

$$u(t) \leq f(t) + \int_t^{t_0} \psi(t, s) ds + \varphi_1(t) \int_t^{t_0} \varphi_2(s) [f(s) + \int_s^{t_0} \psi(s, \xi) d\xi] \times \exp\left\{\int_t^s \varphi_1(\xi) \varphi_2(\xi) d\xi\right\} ds. \quad (12)$$

Доведення леми 1 нескладно провести шляхом зведення інтегральної нерівності з сепарабельним ядром (11) до лінійної диференціальної нерівності, використовуючи формулу варіації сталих. Воно аналогічне доведенню теореми 1.1.3 з [9].

Зауваження. *Лема 1 — це узагальнення лінійної інтегральної нерівності [10, с.16]. Відзначимо, що T може бути вибраним як завгодно великим, тому оцінка (12) справджується для всіх $t \leq t_0$, якщо функції $f_1, \varphi_1, \varphi_2, \psi$ визначені для $-\infty \leq t \leq s \leq t_0$.*

Розглянемо клас $C(\rho, \eta)$ функцій $h : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow C[-\varepsilon\Delta, 0]$ з нормою $\|h\| = \sup_{t,x} |h(t, x, \varepsilon)|$, що задовольняють умови (7)–(8). Для довільної функції $h \in C(\rho, \eta)$ розглянемо рівняння (9).

Лема 2. *Нехай виконуються умови I, III. Тоді оператор $\Phi(t, s, x, \varepsilon, h)$ для всіх $s \geq t$ задовольняє нерівність*

$$|\Phi(t, s, x, \varepsilon, h) - \Phi(t, s, \bar{x}, \varepsilon, \bar{h})| \leq K \left(|x - \bar{x}| + \frac{c_1(\rho, \eta)}{\gamma} \|h - \bar{h}\| \right) e^{\gamma(s-t)},$$

де $\gamma = \alpha + K[b_1(\rho, \varepsilon) + c_1(\rho, \varepsilon)\eta]$.

Доведення. Розглянемо функції $\varphi(t) = \Phi(t, s, x, \varepsilon, h)$, $\bar{\varphi}(t) = \Phi(t, s, \bar{x}, \varepsilon, \bar{h})$. Ці функції задовольняють інтегральні рівняння

$$\varphi(t) = X(t, s)x + \int_s^t X(t, \tau)f(\tau, \varphi(\tau), \varepsilon)d\tau, \quad \bar{\varphi}(t) = X(t, s)\bar{x} + \int_s^t X(t, \tau)f(\tau, \bar{\varphi}(\tau), \varepsilon)d\tau.$$

На підставі припущення I маємо, що фундаментальна матриця $X(t, s)$ рівняння $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ задовольняє нерівність $|X(t, s)| \leq Ke^{\alpha|t-s|}$, $K > 0$, $\alpha \geq 0$.

Враховуючи умови (4), (7), (8), одержуємо для $s \geq t$

$$|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| \leq Ke^{\alpha(s-t)}|x - \bar{x}| + K \int_t^s e^{\alpha(\tau-t)} \{ [b_1(\rho, \varepsilon) + c_1(\rho, \varepsilon)\eta] |\varphi(s) - \bar{\varphi}(s)| + c_1(\rho, \varepsilon) \|h - \bar{h}\| \} d\tau.$$

Використовуючи тепер лему 1, поклавши $f(t) = Ke^{\alpha(s-t)}|x - \bar{x}|$, $\varphi_1(t) = K[b_1(\rho, \varepsilon) + c_1(\rho, \varepsilon)\eta]e^{-\alpha t}$, $\varphi_2(s) = e^{\alpha s}$, $\psi(t, s) = Kc_1(\rho, \varepsilon)\|h - \bar{h}\|e^{\alpha(s-t)}$, одержуємо потрібну оцінку. Лема 2 доведена.

Визначимо на класі функцій $C(\rho, \eta)$ оператор $S_{t,x}(h)$ рівністю

$$S_{t,x}(h) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t T(t, s) Y_0 g(s, \varphi(s), h(s, \varphi(s), \varepsilon), \varepsilon) ds, \quad (13)$$

де $\varphi(s) = \Phi(s, t, x, \varepsilon, h)$.

Лема 3. *Нехай виконуються умови I–III і $\beta - \gamma > 0$. Тоді оператор $S_{t,x}(h)$ задовольняє нерівності*

$$|S_{t,x}(h)| \leq \frac{N}{\varepsilon\beta} a_2(\rho, \varepsilon), \quad (14)$$

$$|S_{t,x}(h) - S_{t,x}(\bar{h})| \leq \omega(\rho, \eta, \varepsilon) |x - \bar{x}| + \left(\frac{c_1(\rho, \eta)\omega(\rho, \eta, \varepsilon)}{\gamma} + \frac{c_2(\rho, \eta)N}{\varepsilon\beta} \right) \|h - \bar{h}\|, \quad (15)$$

$$\text{де } \omega(\rho, \eta, \varepsilon) = \frac{NK[b_2(\rho, \varepsilon) + c_2(\rho, \varepsilon)\eta]}{\varepsilon(\beta - \gamma)}.$$

Доведення. Оцінка (14) безпосередньо випливає з нерівності (3) та властивостей функцій g і h . Встановимо оцінку (15). Маємо

$$\begin{aligned} |S_{t,x}(h) - S_{t,\bar{x}}(\bar{h})| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t Ne^{-\beta(t-s)} \times \\ &\times |g(s, \varphi(s), h(s, \varphi(s), \varepsilon), \varepsilon) - g(s, \bar{\varphi}(s), \bar{h}(s, \bar{\varphi}(s), \varepsilon), \varepsilon)| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t Ne^{-\beta(t-s)} \{ [b_2(\rho, \varepsilon) + c_2(\rho, \varepsilon)\eta] \times \\ &\times |\varphi(s) - \bar{\varphi}(s)| + c_2(\rho, \varepsilon) \|h - \bar{h}\| \} ds. \end{aligned}$$

Використовуючи тепер лему 2, одержуємо

$$\begin{aligned} |S_{t,x}(h) - S_{t,\bar{x}}(\bar{h})| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t Ne^{-\beta(t-s)} \times \\ &\times \left\{ K[b_2(\rho, \varepsilon) + c_2(\rho, \varepsilon)\eta] |x - \bar{x}| e^{\gamma(t-s)} + \right. \\ &\left. + \left[\frac{Kc_1(\rho, \varepsilon)}{\gamma} (b_2(\rho, \varepsilon) + c_2(\rho, \varepsilon)\eta) e^{\gamma(t-s)} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_2(\rho, \varepsilon) \Big] \|h - \bar{h}\| \Big\} ds = \\
& = \frac{NK[b_2(\rho, \varepsilon) + c_2(\rho, \varepsilon)\eta]}{\varepsilon(\beta - \gamma)} |x - \bar{x}| + \\
& + \frac{N}{\varepsilon} \left[\frac{Kc_1(\rho, \varepsilon)(b_2(\rho, \varepsilon) + c_2(\rho, \varepsilon)\eta)}{\gamma(\beta - \gamma)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{c_2(\rho, \varepsilon)}{\beta} \right] \|h - \bar{h}\|.
\end{aligned}$$

Лема 3 доведена.

3. Припустимо, що при визначенні класу функцій $C(\rho, \eta)$ числа ρ і η вдалося вибрати так, щоб справджувалися нерівності

$$\alpha + K[b_1(\rho, \varepsilon) + c_1(\rho, \varepsilon)\eta] < \beta,$$

$$\frac{N}{\varepsilon\beta} a_2(\rho, \varepsilon) \leq \rho, \quad \omega(\rho, \eta, \varepsilon) < \eta, \quad (16)$$

$$\frac{c_1(\rho, \varepsilon)}{\alpha + K[b_1(\rho, \varepsilon) + c_1(\rho, \varepsilon)\eta]} + \frac{c_2(\rho, \varepsilon)N}{\varepsilon\beta} \leq q < 1.$$

Тоді з оцінок (14), (15) маємо

$$|S_{t,x}(h)| \leq \rho, \quad |S_{t,x}(h) - S_{t,\bar{x}}(h)| \leq \eta|x - \bar{x}|,$$

$$|S_{t,x}(h) - S_{t,x}(\bar{h})| \leq q|h - \bar{h}|.$$

Це означає, що для таких ρ, η оператор $S_{t,x}(h)$ відображає $C(\rho, \eta)$ в себе і є стискаючим. Отже, в цьому випадку рівняння (10) має в $C(\rho, \eta)$ єдиний розв'язок $h^*(t, x, \varepsilon)$, а система рівнянь (5) — інтегральний многовид, що визначається співвідношенням

$$y_t = h^*(t, x, \varepsilon). \quad (17)$$

Підсумуємо наведені міркування у вигляді теореми.

Теорема. Нехай виконуються умови I—III, де функції a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$) і числа $\alpha, \beta, N, K, L, \varepsilon_0$ такі, що допускають існування таких ρ і η , що здійснюються нерівності (16). Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (5) має єдиний (ρ, η) —інтегральний многовид повільних змінних (17).

Зауваження. Умови існування інтегрального многовиду зображуються як сукупність нерівностей для деяких допоміжних функцій. Вибираючи ці функції певним чином, можна одержати умови існування інтегральних многовидів для конкретних класів систем.

Як приклад розглянемо випадок, коли корені характеристичного рівняння $\det(\lambda E - L(t, e^\lambda)) = 0$ для всіх $t \in \mathbf{R}$ лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda \leq -2\beta_0 < 0$. Тоді для оператора зсуву $T(t, s)$ справджується оцінка [7] $|T(t, s)\varphi| \leq N_0 e^{-\frac{\beta_0}{\varepsilon}(t-s)}|\varphi|$, $N_0 > 0, t \geq s$. Вибираючи тепер $\beta = \beta_0 \varepsilon^{-1}$, функції a_1, b_1, c_1 — сталими, a_2, b_2, c_2 — нескінченно малими при $\rho \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, легко бачити, що при достатньо малих ε, ρ, η нерівності (16) справджуються. Отже, в цьому випадку система рівнянь (5) має єдиний інтегральний многовид у класі $C(\rho, \eta)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Задирака К.В.* О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Укр. мат журн.— 1965.— **17**, N1.— С.47—63.
2. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий.— М.: Наука, 1988.— 256 с.
3. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И.* Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Укр. мат журн.— 1968.— **20**, N6.— С.791—801.
4. *Фодчук В.И., Черевко И.М.* К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат журн.— 1982.— **34**, N6.— С.725—731.
5. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат журн.— 1986.— **38**, N3.— С.335—340.
6. *Черевко І.М.* Інтегральні многовиди і декомпозиція нелінійних сингулярно збурених систем із запізненням // Нелінійні коливання.— 1998.— **1**, N1.— С.139—144.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
8. *Лыкова О.Б., Барис Я.С.* Приближенные интегральные многообразия.— К.: Наук. думка, 1993.— 314 с.
9. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения.— К.: Наук. думка, 1991.— 248 с.
10. *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.— 152 с.