

ПРАЦЬОВИТИЙ М.В., МАКАРЧУК. О.П.

ПРО ДЕЯКІ МЕТРИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ ЛАНЦЮГОВИМИ A_2 -ДРОБАМИ

В роботі розглядаються деякі метричні результати типу Леві-Хінчина для ланцюгового A_2 -представлення дійсних чисел з алфавітом $\{\alpha_1; \alpha_2\}$. Акцент здійснюється на використанні теорії динамічних систем, зокрема теореми Біркхофа-Хінчина для динамічної системи з оператором лівостороннього зсуву символів відповідного A_2 -зображення дійсних чисел з алфавітом $\{\alpha_1; \alpha_2\}$.

Ключові слова і фрази: ланцюгове A_2 -представлення, піхідний дріб, метричні властивості, частота цифри, динамічна система, ергодична теорема.

Mykhailo Drahomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine; Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska St., 3, Kyiv, 01024, Ukraine (Pratsiovytyi M.V.)

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska St., 3, Kyiv, 01024, Ukraine (Makarchuk O.P.)

e-mail: prats4444@gmail.com (Pratsiovytyi M.V.), makolpet@gmail.com (Makarchuk O.P.)

ВСТУП

Для послідовності додатних чисел (a_n) та натурального k позначимо скінченний ланцюговий дріб

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}.$$

Нехай

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] = \lim_{k \rightarrow +\infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] \quad (1)$$

при умові, що остання границя існує. Відповідно до теореми Зейделя-Штерна [6, 12, 13]

границя (1) існує тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ розбіжний.

УДК 511.7

2010 *Mathematics Subject Classification*: 11K50.

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, M.P., O.M.).

На вимірному просторі $([0; 1]; B[0; 1])(B[a; b] - \sigma\text{-алгебра борелівських множин } [a; b])$ для класичного ланцюгового представлення розглянемо оператор Гаусса

$$T([0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [0; a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots] \quad (2)$$

та міру Лебега-Стілтєса $\psi(\cdot)$, що відповідає функції розподілу

$$g(x) = \log_2(x + 1), x \in [0; 1].$$

Відповідна міра $\psi(\cdot)$ називається мірою Гаусса. Добре відомо [11], що динамічна система $([0; 1]; B[0; 1]; \psi(\cdot); T)$ є ергодичною, більш того [3] перетворення T є сильно перемішуючим, тобто

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(A \cap T^{-n}(B)) = \psi(A)\psi(B) \quad \forall A, B \in B[0; 1],$$

де

$$T^n(x) = \underbrace{T(T(\dots T(x)))}_n, \quad T^{-n}(B) = \{x \mid T^n(x) \in B\}.$$

Як показав О.Хінчін [7] для майже всіх (в розумінні міри Лебега $\lambda(\cdot)$) чисел x з ланцюговим зображенням $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$ виконуються умови

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)^{\log_2(k)} \approx 2,6854 - \text{стала Хінчина},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log_2(n+1)}{n(n+1)}\right)^{-1} \approx 1,7154.$$

Нехай $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)$ — послідовність підхідних дробів, що відповідають числу x . Як показав П. Леві [8] для майже всіх чисел $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$ виконуються умови

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; a_j = l\} = \log_2 \left(1 + \frac{1}{l(l+1)}\right) \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(q_n(x))}{n} = \frac{\pi^2}{12 \ln(2)} \approx 1,1866 - \text{стала Хінчина-Леві},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\lambda(\Delta_n^*(x)))}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|}{n} = -\frac{\pi^2}{6 \ln(2)} \approx -0,5933,$$

де $\Delta_n^*(x)$ — множина чисел, перші $n+1$ цифр ланцюгового представлення яких рівні відповідно $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Відомо [4], що для кожного числа $t \in [\alpha_1; \alpha_2]$, де $\alpha_1 < \alpha_2$ — додатні числа такі, що $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{2}$, існує послідовність (b_n) кожен член якої рівний α_1 або α_2 і відповідно

$$t = [0; b_1, \dots, b_n, \dots].$$

Відповідне зображення називається ланцюговим A_2 -зображенням з алфавітом $\{\alpha_1; \alpha_2\}$. Деяка зчисленна множина чисел (A_2 -бінарних) відрізка $[\alpha_1; \alpha_2]$ має відповідно два A_2 -зображення виду

$$[0; b_1, \dots, b_{n-1}, \alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2)] = [0; b_1, \dots, b_{n-1}, \alpha_2, (\alpha_2, \alpha_1)],$$

де круглі дужки символізують період. Усі решта числа відрізка $[\alpha_1; \alpha_2]$ (A_2 -унарні) мають єдине A_2 -зображення. В подальшому для A_2 -бінарних чисел відрізка $[\alpha_1; \alpha_2]$ будемо використовувати A_2 -зображення, що містить період (α_1, α_2) .

Тополого-метрична теорія ланцюгового A_2 -зображення побудована в роботі [4]. Лебегівська та фрактальна структура розподілів, заданих в термінах ланцюгового A_2 -зображення досліджувалась в роботах [9, 10]. Як було показано в [9] для майже всіх чисел $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{q_n(x)} \leq \sqrt{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n(x)}{(\sqrt{2})^n} = 0.$$

Нехай $\eta(\cdot)$ — міра Лебега-Стілтєса, що відповідає абсолютно неперервній функції розподілу

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{x+2\alpha_1}{x+2\alpha_2}\right) + \ln\left(\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3\alpha_1}\right)}{2\ln(\alpha_1 + \alpha_2) - \ln(2)} \quad \forall x \in [\alpha_1; \alpha_2],$$

з щільністю

$$p(x) = \frac{2\alpha_2 - 2\alpha_1}{2\ln(\alpha_1 + \alpha_2) - \ln(2)} \cdot \frac{1}{(x + 2\alpha_1)(x + 2\alpha_2)} \quad \forall x \in [\alpha_1; \alpha_2].$$

Наукова робота присвячена дослідженню метричних властивостей для ланцюгового A_2 -зображення з алфавітом $\{\alpha_1; \alpha_2\}$, зокрема побудові відповідних аналогів результатів Хінчина-Леві на основі теорії динамічних систем.

1 ЕРГОДИЧНІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ $([\alpha_1; \alpha_2]; B[\alpha_1; \alpha_2]; \eta(\cdot); T)$ ДЛЯ ЛАНЦЮГОВОГО A_2 -ЗОБРАЖЕННЯ З АЛФАВІТОМ $\{\alpha_1; \alpha_2\}$.

Нехай ланцюгове A_2 -зображення числа x має вигляд

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]. \quad (3)$$

Розглянемо послідовності

$$q_n(x) = q_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_n q_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) + q_{n-2}(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}),$$

$$p_n(x) = p_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_n p_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) + p_{n-2}(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}),$$

$$p_{-1} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad p_0 = 0, \quad q_0 = 1.$$

Добре відомо [4, 6], що

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x; \quad p_n(x)q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)q_n(x) = (-1)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{q_n(x)}{q_{n-1}(x)} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1] \in [\alpha_1; 3\alpha_2] \quad \forall n \in N, \quad (4)$$

$$q_n(x) \geq \frac{1}{\alpha_1^2 + 4} \left(\left(\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} \right) = w_n, \quad (5)$$

$$q_n(x) \leq \frac{1}{\alpha_2^2 + 4} \left(\left(\frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Для числа x з ланцюговим A_2 -зображенням (3) в подальшому, там де це необхідно, будемо використовувати еквівалентні позначення q_n , $q_n(x)$, $q_n(a_1; a_2; \dots; a_n)$ та відповідно p_n , $p_n(x)$, $p_n(a_1; a_2; \dots; a_n)$. Позначимо

$$[x; y]^* = [\min(x; y); \max(x; y)].$$

Нехай число x має ланцюгове A_2 -зображенням (3). Відомо [4], що множина чисел виду

$$\{[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \xi_1, \xi_2, \dots] | \xi_k \in \{\alpha_1; \alpha_2\} \forall k \in N\}$$

є відрізком

$$\Delta_n(x) = \Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[\frac{p_n + \alpha_1 p_{n-1}}{q_n + \alpha_1 p_{n-1}}; \frac{p_n + \alpha_2 p_{n-1}}{q_n + \alpha_2 p_{n-1}} \right]^*$$

(циліндром n -го рангу), причому довільні різні циліндри n -го рангу мають щонайбільше одну спільну точку.

Теорема 1. Динамічна система $([\alpha_1; \alpha_2]; B([\alpha_1; \alpha_2]); \eta(\cdot); T)$ ергодична.

Доведення. Покажемо, що перетворення T зберігає міру $\eta(\cdot)$. Для цього достатньо показати, що для довільного відрізка $[\alpha; \beta] \subseteq [\alpha_1; \alpha_2]$ виконується умова

$$\eta(T^{-1}([\alpha; \beta])) = \eta(T([\alpha; \beta])).$$

Оскільки [1]

$$T^{-1}([\alpha; \beta]) = \left[\frac{1}{\beta + \alpha_1}; \frac{1}{\alpha + \alpha_1} \right] \cup \left[\frac{1}{\beta + \alpha_2}; \frac{1}{\alpha + \alpha_2} \right],$$

маємо

$$\begin{aligned} \eta(T^{-1}([\alpha; \beta])) &= \eta(T([\alpha; \beta])) \Leftrightarrow \\ f(\beta) - f(\alpha) &= f\left(\frac{1}{\alpha + \alpha_1}\right) - f\left(\frac{1}{\beta + \alpha_1}\right) + f\left(\frac{1}{\alpha + \alpha_2}\right) - f\left(\frac{1}{\beta + \alpha_2}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(\beta) + f\left(\frac{1}{\beta + \alpha_2}\right) + f\left(\frac{1}{\beta + \alpha_1}\right) &= f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha + \alpha_2}\right) + f\left(\frac{1}{\alpha + \alpha_1}\right), \end{aligned}$$

що вірно, адже для кожного $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x + \alpha_2}\right) + f\left(\frac{1}{x + \alpha_1}\right) = 3d + c \left(v(x) + v\left(\frac{1}{x + \alpha_2}\right) + v\left(\frac{1}{x + \alpha_1}\right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 3d + c \ln \left(\frac{x + 2\alpha_1}{x + \frac{1}{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_1 x + 2\alpha_1^2 + 1}{\frac{x}{\alpha_1} + 2} \cdot \frac{2\alpha_1 x + 2}{\frac{x}{\alpha_1} + \frac{1}{2\alpha_1^2} + 1} \right) = \\
&= 3d + c \ln \left(\frac{x + 2\alpha_1}{\frac{x\alpha_1 + 1}{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_1 x + 2\alpha_1^2 + 1}{\frac{x + 2\alpha_1}{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_1 x + 2}{\frac{2\alpha_1 x + 2\alpha_1^2 + 1}{2\alpha_1^2}} \right) = 3d + c \ln(4\alpha_1^4) - \text{const},
\end{aligned}$$

де

$$c = \frac{1}{2 \ln(\alpha_1 + \alpha_2) - \ln(2)}, \quad d = \frac{\ln \left(\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3\alpha_1} \right)}{2 \ln(\alpha_1 + \alpha_2) - \ln(2)}, \quad v(x) = \ln \left(\frac{x + 2\alpha_1}{x + 2\alpha_2} \right).$$

Покажемо, що перетворення T ергодичне, тобто для довільної інваріантної множини W ($T^{-1}(W) = W$) виконується умова $\eta(W) \in \{0; 1\}$. Нехай $[a; b] \subseteq [\alpha_1; \alpha_2]$, $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ — набір чисел з множини $\{\alpha_1; \alpha_2\}$.

Зрозуміло, що

$$\begin{aligned}
\lambda \left(T^{-n}([a; b]) \cap \Delta_n(c_1, c_2, \dots, c_n) \right) &= \lambda \left(\left[\left[0; c_1, c_2, \dots, c_n, \frac{1}{a} \right]; \left[0; c_1, c_2, \dots, c_n, \frac{1}{b} \right] \right]^* \right) = \\
&= \left| \frac{p_{n-1} + \frac{1}{b}p_n}{q_{n-1} + \frac{1}{b}q_n} - \frac{p_{n-1} + \frac{1}{a}p_n}{q_{n-1} + \frac{1}{a}q_n} \right| = \frac{(b-a)}{(bq_{n-1} + q_n)(aq_{n-1} + q_n)} = \\
&= \lambda([a; b]) \cdot \lambda(\Delta_n) \cdot \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \frac{(q_n + \alpha_1 q_{n-1})(q_n + \alpha_2 q_{n-1})}{(bq_{n-1} + q_n)(aq_{n-1} + q_n)}.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що функція $h(z) = \frac{z + \alpha_1}{z + \alpha_2} = 1 - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{z + \alpha_2}$ є зростаючою на проміжку $[\alpha_1; \alpha_2]$. Враховуючи умову (4) маємо

$$\begin{aligned}
\frac{(q_n + \alpha_1 q_{n-1})(q_n + \alpha_2 q_{n-1})}{(bq_{n-1} + q_n)(aq_{n-1} + q_n)} &\geq \frac{(q_n + \alpha_1 q_{n-1})(q_n + \alpha_2 q_{n-1})}{(q_n + \alpha_2 q_{n-1})(q_n + \alpha_2 q_{n-1})} = \\
&= \frac{(q_n + \alpha_1 q_{n-1})}{(q_n + \alpha_2 q_{n-1})} = h \left(\frac{q_n}{q_{n-1}} \right) \geq h(\alpha_1).
\end{aligned}$$

Нехай E — інваріантна множина відносно перетворення T , причому $\lambda(E) > 0$.

Оскільки $T^{-n}(E) = E$, то маємо

$$\lambda(E \cap \Delta_n) = \lambda(T^{-n}(E) \cap \Delta_n) \geq \frac{h(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \lambda(E) \lambda(\Delta_n)$$

і враховуючи лему Кнопша [2, 5], отримаємо

$$\lambda(E) = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Оскільки міра $\eta(\cdot)$ еквівалентна мірі $\lambda(\cdot)$, то маємо $\eta(E) = 1$. □

2 МЕТРИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ ЛАНЦЮГОВОГО A_2 -ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКУ $[\alpha_1; \alpha_2]$.

Для числа x з ланцюговим A_2 -зображенням (3) для набору цифр $(b_1, b_2, \dots, b_k)$, де $b_j \in \{\alpha_1; \alpha_2\}$ для кожного $j \in \{1; 2; \dots; k\}$, позначимо границю (за умови, що вона існує)

$$\nu((b_1, b_2, \dots, b_k); x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n((b_1, b_2, \dots, b_k); x)}{n},$$

де $N_n((b_1, b_2, \dots, b_k); x)$ — кількість наборів цифр $(b_1; b_2; \dots; b_k)$ серед

$$(a_1, a_2, \dots, a_k), (a_2, a_3, \dots, a_{k+1}), \dots, (a_{n-k+1}, \dots, a_n).$$

Теорема 2. Для майже всіх чисел $t \in [\alpha_1; \alpha_2]$ є вірною умова: для кожного набору $(b_1; b_2; \dots; b_k)$ такого, що $b_j \in \{\alpha_1; \alpha_2\}$ для кожного $j \in \{1; 2; \dots; k\}$, виконується рівність

$$\nu((b_1, b_2, \dots, b_k); t) = \int_{\Delta_k(b_1, b_2, \dots, b_k)} p(x) dx.$$

Доведення. Для заданого циліндру $\Delta_k(b_1, b_2, \dots, b_k)$ розглянемо функцію

$$r(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_k(b_1, b_2, \dots, b_k), \\ 0, & x \notin \Delta_k(b_1, b_2, \dots, b_k). \end{cases}$$

За теоремою Біркхофа-Хінчина множина $C(b_1, b_2, \dots, b_k)$ чисел x таких, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(T(x)) + \dots + r(T^n(x))}{n} = \int_{\Delta_k(b_1, b_2, \dots, b_k)} p(x) dx$$

має міру $\eta(\cdot)$ рівну 1 і відповідно

$$\lambda(C(b_1, b_2, \dots, b_k)) = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Нехай множина C^* є перетином всіх множин $C(b_1, b_2, \dots, b_k)$ по всіх натуральних k та відповідних наборах $(b_1, b_2, \dots, b_k)$. Зрозуміло, що $\eta(C^*) = 1$.

Оскільки

$$\sum_{k=1}^n r(T^k(x)) = N_n((b_1, b_2, \dots, b_k); x)$$

маємо потрібне. □

Враховуючи попередню теорему легко отримати наступний наслідок

Наслідок 1. Для майже всіх чисел x з ланцюговим A_2 -зображенням (3) виконуються умови

$$\begin{aligned} \nu((\alpha_1); x) &= f(\alpha_2) - f\left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) = D(\alpha_1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &= \alpha_1 D(\alpha_1) + \alpha_2 (1 - D(\alpha_1)), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} &= \alpha_1^{D(\alpha_1)} \cdot \alpha_2^{1-D(\alpha_1)}. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Позначимо*

$$G = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \ln(x)p(x)dx.$$

Для майже всіх чисел $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$ виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q_n(x)} = e^G.$$

Доведення. Легко бачити, що

$$p_n(a_1; a_2; \dots; a_n) = q_{n-1}(a_2; a_3; \dots; a_n),$$

тобто $p_n(x) = q_{n-1}(T(x))$ і відповідно маємо

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))} \cdots \frac{p_1(T^{n-1}(x))}{q_1(T^{n-1}(x))} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \frac{p_{n-1}(T(x))p_{n-1}(T^2(x)) \dots p_1(T^{n-1}(x))}{p_n(x)p_{n-1}(T(x)) \dots p_2(T^{n-2}(x))} = \frac{1}{q_n(x)},$$

адже $p_1(T^{n-1}(x)) = 1$. Маємо

$$-\ln(q_n(x)) = \ln \frac{p_n(x)}{q_n(x)} + \ln \frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))} + \dots + \ln \frac{p_1(T^{n-1}(x))}{q_1(T^{n-1}(x))}.$$

Для $z \in \Delta_k(z)$, маємо

$$\left| \ln(z) - \ln \frac{p_k(z)}{q_k(z)} \right| \leq \left| \max_{\Delta_k} (\ln t)' \right| \cdot \lambda(\Delta_k(z)) \leq 2\alpha_2 \lambda(\Delta_k(z)).$$

Враховуючи (5) маємо

$$\lambda(\Delta_k) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha_1 q_{k-1} + q_k)(\alpha_2 q_{k-1} + q_k)} \leq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha_1 w_{k-1} + w_k)(\alpha_2 w_{k-1} + w_k)} = c_k,$$

причому ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ збігається до деякої сталої $L > 0$.

Таким чином, для кожного $j \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ виконується умова

$$\ln \left(\frac{p_{n-j}(T^j(x))}{q_{n-j}(T^j(x))} \right) = \ln(T^j(x)) + A_j(x),$$

де $A_j(x) \leq 2\alpha_2 c_{n-j}$. За теоремою Біркхофа-Хінчина, для η -майже всіх $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln T^k(x) = G.$$

Оскільки $\left| \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2\alpha_2 c_k \leq 2\alpha_2 L$ маємо, що для η -майже всіх $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$

$$\frac{1}{n} \ln(q_n(x)) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(T^k(x)) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) \rightarrow G \quad (n \rightarrow +\infty),$$

звідки випливає потрібне. □

Твердження 1. Предметом подальшого дослідження можуть бути тополого-фрактальні властивості множин, які не задовольняють метричні умови теорем 2 та 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Pratsiovytyi M.V. *Two-character encoding systems for real numbers and their applications*. Kyiv: Scientific Opinion, 316 (2022).
- [2] Dajani K., Kraaikamp C. *Ergodic theory of numbers*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 190 (2002).
- [3] Dinaburg E, Sinai Ya. *Statistics of solutions of the integral equation $ax - by = \pm 1$* . Funct. Anal., Appl 1990. **24**, №3, 1–13.
- [4] Dmytrenko S., Kyurchev D., Pratsiovytyi M. *Continued fraction A_2 representation of real numbers and its geometry*. Ukr. Math. J 2009, **61**(4), 452–463. (in Ukrainian) DOI:10.1007/s11253-009-0236-7
- [5] Knopp K. *Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen-Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten*. Math. Annalen 1926, **85**, 409–426.
- [6] Khinchin A. Ya. *Continued fractions*. Chicago: The University of Chicago Press, 112 (1964).
- [7] Khintchine A. *Metrische Kettenbruchprobleme*. Compositio Math. France 1935, **1**, 361–382.
- [8] Levy P. *Sur les lois de probabilité dont dependent les quotients complets et incomplets dune fraction continue*. Bull. Soc. Math. France 1929, **57**, 178–194. DOI: 10.24033/bsmf.1150
- [9] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. *Singularity of the distribution of a random variable represented by a continued A_2 -fraction with independent elements*. Teor. Imovir. ta Matem. Statyst 2009, **81**, 139–154. (in Ukrainian)
- [10] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. *Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements*. Random Oper. Stochastic Equations 2009, **17**(1), 91–101. DOI:10.1515/ROSE.2009.006
- [11] Ryll-Nardzewski C. *On the ergodic theorems II (Ergodic theory of continued fractions)*. Studia Mathematica 1951, **12**, 74–79.
- [12] Seidel L. *Untersuchungen  ber die Konvergenz und Divergenz der Kettenbr che*. Habilschrift, München (1846).
- [13] Stern M. * ber die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs*. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 1848, **37**, 255–272.

Надійшло 13.06.2025

Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P. *On some metric results for representation numbers by continued A_2 -fractions*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 1 (2025), 100–108.

The classical problem of metric number theory is the search for properties that hold almost everywhere in the sense of the Lebesgue measure for the corresponding representation. An important result in the corresponding context is the well-known result of E. Borel for the classical s -adic representation of real numbers, which was subsequently significantly developed and deepened, in particular, by means of the theory of probability and dynamical systems. The rapid development of the theory of Diophantine approximations is associated, in particular with the classical continued fraction representation as a means of finding the best, in some sense, approximations of irrational numbers to rational ones. The latter aspect undoubtedly created the need to find metric properties for numbers given by continued fractions with natural elements. The first metric results for the classical continued fraction representation were obtained by O. Khinchyn, by rather complex methods, on the basis of a thorough analysis of the

topological-metric properties of the corresponding representation. Other metric results were subsequently obtained by P. Levi. An important step in the development of methods of metric number theory was played by the theory of dynamical systems, in particular, the Birkhoff-Khinchin theorem. A relatively new concept is the continued fraction A_2 -representation of real numbers. This representation involves the use of only two positive digits of the alphabet, the product of which is equal to 0.5. Thus, the continued fraction A_2 -representation of real numbers occupies an intermediate place between the classical binary representation and the classical chain one, which in turn is characterized by an infinite alphabet. The corresponding similarity, on the other hand, does not allow using the means of the laws of large numbers to find metric properties of numbers that have a continued fraction A_2 -representation. It should also be noted that the direct methods used by O. Khinchin and P. Levi are also difficult to obtain the corresponding results for the continued fraction A_2 -representation. The paper considers some metric results given in terms of the continued fraction A_2 -representation of real numbers with the alphabet $\{\alpha_1; \alpha_2\}$. The ergodic properties of the dynamical system are studied of the system corresponding to the Bernoulli shift of the symbols of the corresponding A_2 -representation of real numbers of the segment $[\alpha_1; \alpha_2]$.