

КОМУТАНТ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА

В просторі функцій, аналітичних у кругових областях, описано комутант різницевого оператора, пов'язаного з оператором Данкла.

The commutant of a difference operator associated with the Dunkl operator in the space of analytic functions in circular domains is described.

Через A_R , $0 < R \leq \infty$, позначимо простір усіх функцій, аналітичних у крузі $|z| < R$, що наділений топологією компактної збіжності, а символом $\mathcal{L}(A_R)$ – множину всіх операторів, які лінійно та неперервно діють у просторі A_R . Для довільного $k \in \mathbb{C}$ оператор Данкла, який визначається формулою

$$(\Lambda_k f)(z) = f'(z) + k \frac{f(z) - f(-z)}{z} \quad (1)$$

при $z \neq 0$, і $(\Lambda_k f)(0) = (2k + 1)f'(0)$ лінійно та неперервно діє в кожному з просторів A_R , $0 < R \leq \infty$. Цей оператор визначений в працях [1], [2]. Оператор Данкла відіграє важливу роль в різних задачах математики та фізики (див., наприклад, бібліографію в [3]). Оператор Данкла та деякі його модифікації в просторах аналітичних функцій вивчалися в працях [4]–[13]. В них, зокрема, описано комутант оператора Данкла в просторах функцій, аналітичних у кругових областях. З результатів роботи [13] випливає, що у випадку, коли $k \neq -\frac{2n+1}{2}$, $n = 0, 1, \dots$ оператор T з класу $\mathcal{L}(A_R)$ буде переставним з оператором Данкла Λ_k тоді і тільки тоді, коли

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Lambda_k^n,$$

де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!|c_n|} = 0$ при $R < \infty$, або $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!|c_n|} < \infty$ при $R = \infty$.

Розглянемо різницевий оператор P , який лінійно та неперервно діє в просторі A_R за правилом

$$(Pf)(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{z} \quad (2)$$

при $z \neq 0$ і $(Pf)(0) = 2f'(0)$. Оператор Данкла є певною лінійною комбінацією оператора диференціювання D та різницевого оператора P . Комутант оператора диференціювання в просторі A_R описано в [14]. У зв'язку з цим виникає задача про опис комутанта різницевого оператора P в просторі A_R . Розв'язанню цієї задачі присвячена дана стаття.

Припустимо, що оператора T з класу $\mathcal{L}(A_R)$ є переставним з оператором P , тобто виконується рівність

$$TP = PT. \quad (3)$$

Позначимо $T(z^n) = \varphi_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Подіявши рівність (3) на z^n , отримуємо, що

$$(1 + (-1)^{n+1})\varphi_{n-1}(z) = \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(-z)}{z}. \quad (4)$$

Далі розглянемо два випадки:

1) Нехай $n = 2k$, $k = 0, 1, \dots$. Тоді з (4) одержимо, що $\varphi_{2k}(z) = \varphi_{2k}(-z)$ при $|z| < R$. Функції $\varphi_{2k}(z)$, $k = 0, 1, \dots$ є парними функціями з простору A_R . Розкладаючи $\varphi_{2k}(z)$ у степеневий ряд, одержимо, що

$$\varphi_{2k}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!} z^{2j} = g_{2k}(z^2),$$

де $g_{2k}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!} t^j$, $k=0, 1, \dots$. Покажемо, що функції $g_{2k} \in A_{R^2}$ при $k = 0, 1, \dots$. Відомо [15], що функція $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ належить до простору A_R тоді і тільки тоді,

коли $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|g_n|} \leq \frac{1}{R}$. Оскільки $\varphi_{2k} \in A_R$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\varphi_{2k}^{(n)}(0)}{(n)!} \right|} = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[2j]{\left| \frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!} \right|} \leq \frac{1}{R}$$

при $k = 0, 1, \dots$. Тому

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\left| \frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!} \right|} &= \\ &= \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\sqrt[2j]{\left| \frac{\varphi_{2k}^{(2j)}(0)}{(2j)!} \right|} \right)^2 \leq \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

і функції $g_{2k} \in A_{R^2}$ при $k = 0, 1, \dots$

2) Нехай $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, \dots$. Тоді (4) матиме вигляд

$$2\varphi_{2k}(z) = \frac{\varphi_{2k+1}(z) - \varphi_{2k+1}(-z)}{z}.$$

Отже,

$$\varphi_{2k+1}(z) - \varphi_{2k+1}(-z) = 2zg_{2k}(z^2) \quad (5)$$

при $|z| < R$.

Запишемо функції $\varphi_{2k+1}(z)$ у вигляді

$$\varphi_{2k+1}(z) = \psi_{2k+1}(z) + \theta_{2k+1}(z),$$

де $\psi_{2k+1}(z)$ – парна, а $\theta_{2k+1}(z)$ – непарна функції з простору A_R , $k = 0, 1, \dots$. Тоді (5) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \psi_{2k+1}(z) + \theta_{2k+1}(z) - \psi_{2k+1}(-z) - \theta_{2k+1}(-z) &= \\ &= 2zg_{2k}(z^2). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що $\theta_{2k+1}(z) = zg_{2k}(z^2)$ при $|z| < R$ і $\psi_{2k+1}(z)$ – довільні парні функції з простору A_R , $k = 0, 1, \dots$. Тоді за доведеним вище твердженням маємо, що $\psi_{2k+1}(z) = g_{2k+1}(z^2)$, де $g_{2k+1}(t)$ – деякі функції з простору A_{R^2} , $k = 0, 1, \dots$. Таким чином, ми одержали, що

$$\varphi_{2k+1}(z) = g_{2k+1}(z^2) + zg_{2k}(z^2), \quad (6)$$

і

$$\varphi_{2k}(z) = g_{2k}(z^2), \quad (7)$$

де $k = 0, 1, \dots$

Нагадаємо канонічне зображення лінійних неперервних операторів $T : A_{R_1} \rightarrow A_{R_2}$ [15]. Для того, щоб оператор T лінійно і неперервно діяв з A_{R_1} в A_{R_2} необхідно і достатньо, щоб T зображався у вигляді

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(z), \quad (8)$$

де $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in A_{R_1}$, а $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ – послідовність функцій з простору A_{R_2} , яка задовольняє умову

$$\forall r_2 < R_2 \exists r_1 < R_1 \exists C > 0 \forall n = 0, 1, \dots :$$

$$\|\varphi_n\|_{r_2} \leq Cr_1^n. \quad (9)$$

При цьому $\varphi_n(z) = Tz^n$, $n = 0, 1, \dots$. Умова (9) називається умовою неперервності лінійного оператора $T : A_{R_1} \rightarrow A_{R_2}$.

Покажемо, що з умови неперервності для послідовності функцій $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ у просторі A_R випливає аналогічна умова для послідовності функцій $(g_n(z))_{n=0}^{\infty}$ з $R_1 = R$ та $R_2 = R^2$. Оскільки за допущенням T – лінійний неперервний оператор який діє в просторі A_R , то умова (9) виконується з $R_1 = R_2 = R$. Виберемо довільне додатне $r_2 < R^2$. Позначимо $r'_2 = \sqrt{r_2} < R$. Тоді для числа $r'_2 = \sqrt{r_2}$ за умовою (9) при $R_1 = R_2 = R$ для послідовності функцій $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ існують число $r_1 < R$ і стала $C > 0$ такі такі, що

$$\|\varphi_n\|_{r'_2} \leq Cr_1^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Зокрема,

$$\|\varphi_{2k}\|_{r'_2} \leq Cr_1^{2k}, \|\varphi_{2k+1}\|_{r'_2} \leq Cr_1^{2k+1},$$

$k = 0, 1, \dots$. Тоді використовуючи (6) і (7), матимемо

$$\begin{aligned} \|g_{2k}\|_{r_2} &= \max_{|t| \leq r_2} |g_{2k}(t)| = \max_{|z^2| \leq r_2} |g_{2k}(z^2)| = \\ &= \max_{|z| \leq \sqrt{r_2}} |\varphi_{2k}(z)| = \|\varphi_{2k}\|_{\sqrt{r_2}} = \|\varphi_{2k}\|_{r'_2} \leq Cr_1^{2k}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\|g_{2k}\|_{r_2} \leq Cr_1^{2k}, k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Знову використовуючи (6) і (7), отримаємо

$$\|g_{2k+1}\|_{r_2} = \max_{|t| \leq r_2} |g_{2k+1}(t)| =$$

$$\max_{|z^2| \leq r_2} |g_{2k+1}(z^2)| = \max_{|z| \leq \sqrt{r_2}} |\varphi_{2k+1}(z) - z\varphi_{2k}(z)| \leq i$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{|z| \leq r_2} |\varphi_{2k+1}(z)| + \max_{|z| \leq r_2} (|z| |\varphi_{2k}(z)|) \leq \\ &\leq Cr_1^{2k+1} + r_2' Cr_1^{2k} = \left(C + C \frac{r_2'}{r_1}\right) r_1^{2k+1}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\|g_{2k+1}\|_{r_2} \leq \left(C + C \frac{r_2'}{r_1}\right) r_1^{2k+1}. \quad (11)$$

Якщо позначити $C' = C + C \frac{r_2'}{r_1}$, то з (10) і (11) випливає, що $\|g_n\|_{r_2} \leq C' r_1^n$, $n = 0, 1, \dots$. Таким чином, послідовність функцій $(g_n(z))_{n=0}^\infty$ з простору A_{R^2} дійсно задовольняє умову неперервності (9) для $R_1 = R$ і $R_2 = R^2$. Тому за теоремою про канонічний вигляд лінійних неперервних операторів одержуємо, що існує лінійний неперервний оператор $A : A_R \rightarrow A_{R^2}$ для якого

$$Az^n = g_n(z), \quad n = 0, 1, \dots$$

При цьому для довільної функції $f(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n z^n \in A_R$, маємо $(Af)(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n g_n(z)$.

Тоді для довільної функції $f(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n z^n \in A_R$ отримуємо

$$\begin{aligned} (Tf)(z) &= \sum_{n=0}^\infty f_n \varphi_n(z) = \sum_{k=0}^\infty f_{2k} \varphi_{2k}(z) + \\ &+ \sum_{k=0}^\infty f_{2k+1} \varphi_{2k+1}(z) = \sum_{k=0}^\infty f_{2k} g_{2k}(z^2) + \\ &+ \sum_{k=0}^\infty f_{2k+1} (g_{2k+1}(z^2) + z g_{2k}(z^2)) = \\ &= \sum_{n=0}^\infty f_n g_n(z^2) + z \sum_{k=0}^\infty f_{2k+1} g_{2k}(z^2). \end{aligned}$$

Через K позначимо оператор композиції, який діє з простору A_{R^2} у простір A_R за правилом

$$(Kg)(z) = g(z^2).$$

Тоді

$$\sum_{n=0}^\infty f_n g_n(z^2) = (KAf)(z)$$

$$z \sum_{k=0}^\infty f_{2k+1} g_{2k}(z^2) = \left(\frac{z}{2} KAPf\right)(z).$$

Таким чином, одержуємо, що $(Tf)(z) = (KAf)(z) + \frac{1}{2}(U_z KAPf)(z)$ при $|z| < R$, де U_z – оператор множення на z . Отже,

$$T = KA + \frac{1}{2}U_z KAP. \quad (12)$$

Таким чином, ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема. Для того, щоб T належав до класу $\mathcal{L}(A_R)$ і був переставним з оператором P , необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді (12), де A – довільний оператор з класу $\mathcal{L}(A_R, A_{R^2})$.

Доведення. Достатність. Нехай A – довільний оператор з класу $\mathcal{L}(A_R, A_{R^2})$. Тоді формулою (12) визначається оператор T , який належить множині $\mathcal{L}(A_R)$. Залишилося перевірити, що T переставний з P . Позначимо $g_n(z) = Az^n$, $n = 0, 1, \dots$. Оскільки

$$\begin{aligned} (PT)(z^{2n}) &= (PKA + \frac{1}{2}PU_z KAP)(z^{2n}) = 0; \\ (PT)(z^{2n+1}) &= (PKA + \frac{1}{2}PU_z KAP)(z^{2n+1}) = \\ &= (PKA)(z^{2n+1}) + (PU_z KA)(z^{2n}) = \\ &= (PU_z Kg_{2n})(z) = P(z(g_{2n}(z^2))) = 2g_{2n}(z^2); \\ (TP)(z^{2n}) &= (KAP + \frac{1}{2}U_z KAP^2)(z^{2n}) = 0; \\ (TP)(z^{2n+1}) &= (KAP + \frac{1}{2}U_z KAP^2)(z^{2n+1}) = \\ &= (2KA)(z^{2n}) + \left(\frac{1}{2}U_z KAP\right)(z^{2n}) = \\ &= (2Kg_{2n})(z) = 2g_{2n}(z^2), \end{aligned}$$

то виконується рівність $(PT)(z^n) = (TP)(z^n)$, $n = 0, 1, \dots$. Використовуючи лінійність та неперервність операторів P та T на просторі A_R звідси випливає, що оператори P та T є переставними в A_R . Теорема доведена.

Якщо A – довільний оператор з класу $\mathcal{L}(A_R, A_{R^2})$, то формулою $B = KA$ описується загальний вигляд операторів, які діють з простору A_R в $A_R^{(0)}$, де $A_R^{(0)}$ – підпростір простору A_R , який складається з усіх

парних функцій простору A_R . Тому є правильним наступне твердження.

Наслідок. Для того, щоб T належав до класу $\mathcal{L}(A_R)$ і був переставним з оператором P , необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді

$$T = B + \frac{1}{2}U_zBP,$$

де B – довільний оператор з класу $\mathcal{L}(A_R, A_R^{(0)})$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dunkl C.F. Differential difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **311**. – P. 167–183.
2. Dunkl C.F. Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. – 1991. – **43**. – P. 1213–1227.
3. Rösler M. Dunkl operators: theory and applications. In: Koelink, E., Assche, W. Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin. – 2003. – **1817**. – P. 93–135.
4. Salem N. B., Kallel S. Integro-differential-difference equations associated with the Dunkl operator and entire functions // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2004. – **45**. – №4. – P. 699–725.
5. Betancor J. J., Sifi M., Trimeche K. Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on $\mathbb{C}$ // Acta Math. Hungar. – 2005. – **106**. – №1-2. – P. 101–116.
6. Salem N. B., Kallel S. Analytic mean-periodic functions associated with the Dunkl operator in a disk // Complex Variables Theory and Application. – 2005. – **50**. – № 3. – P. 195–210.
7. Ким В. Э., Напалков В. В. Обобщение оператора Данкла на пространстве целых функций // Доклады РАН. – 2008. – **420**. – №2. – С. 166–167.
8. Напалков В. В., Напалков В. В., мл. Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады РАН. – 2008. – **423**. – №3. – С. 300–302.
9. Братищев А.В. Хаотичность коммутирующих с дифференцированием Данкла преобразований пространства аналитических функций // Вестник ДГТУ. – 2009. – **9**. – №2. – С. 196–207.
10. Забирова К. Р., Напалков В. В. Операторы свертки Данкла и их свойства // Доклады РАН. – 2013. – **449**. – №6. – С. 632–634.
11. Карамов И.И., Напалков В. В. Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал. – 2014. – **6**. – №1. – С. 59–68.
12. Лінчук Ю.С. Про один клас діагональних операторів в просторах аналітичних функцій та його застосування // Доповіді НАН України. – 2014. – №3. – С.25–28.
13. Лінчук Ю.С. Узагальнений оператор Данкла-Опдама та його властивості у просторах функцій, аналітичних в областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**. – № 4. – С. 7–17.
14. Нагнибида Н. И. Об изоморфизмах аналитических пространств, перестановочных с оператором дифференцирования // Матем. сб. – 1967. – **72**. – № 2. – С. 250–260.
15. Лінчук С.С., Лінчук Ю.С. Оператори у просторах аналітичних функцій. Чернівці: Рута. – 2011. – 147 с.