УДК 512.622

©2014 р. **Р.А. Заторський, В.М. Пилипів, С.Д. Стефлюк**

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

МНОГОЧЛЕНИ РОЗБИТТІВ

Запропоновано уніфікований підхід до вичення многочленів розбиттів.

In this paper, the authors propose a unified approach to the study of partition polynomials.

Многочлени розбиттів знаходять широкі застосування в дискретній математиці. Вони виникають при диференціюванні складених функцій [1], в теорії чисел [2], алгебрі тощо. Поняття многочленів розбиттів введене Беллом у [3]. Вони, як правило, пов'язані з лінійними рекурентними співвідношеннями, які дозволяють їх ефективно генерувати. Проте, історично склалося так, що рекурентні співвідношення та відповідні їм многочлени розбиттів досліджувалися без видимого взаємозв'язку. З появою апарату числення трикутних матриць, зокрема його парафункцій, з'явилася можливість побудови бієктивних взаємозв'язків між парафункціями трикутних матриць, многочленами розбиттів та лінійними рекурентними співвідношеннями. Більше того, з'явилася можливість уніфікованого підходу до вивчення всіх многочленів розбиттів, введення поняття оберненого многочлена розбиттів тощо. У [4] вивчався клас многочленів розбиттів, що задається парафункціями спеціальних трикутних матриць з першим довільним стовпцем. У цій роботі досліджуються многочлени розбиттів, що задаються парафункціями загальної трикутної матриці.

Попередні означення та твердження

Означення 1. *Парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

називаються відповідно функції

$$\operatorname{ddet}(A)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{p_1+\ldots+p_r=n}(-1)^{n-r}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{r}\{a_{p_1+\ldots+p_s,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\}, \tag{2}$$

$$\operatorname{pper}(\mathrm{A})=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\sum_{p_1+\ldots+p_r=n}\prod_{s=1}^{r}\{a_{p_1+\ldots+p_s,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

Означення 2. *Факторіальним m-добутком $\{a_{ij}\}_m$, $1\leqslant m\leqslant n$ елемента a_{ij} деякої трикутної матриці, назвемо добуток*

$$\{a_{ij}\}_m=\prod_{k=j}^{min(i,m)}a_{ik},$$

а набір таких m-добутків — нормальним m-набором трикутної матриці, якщо об'єднання усіх їх співмножників утворює множину потужності m. Множину всіх нормальних m-наборів трикутної матриці позначимо через A_m.

Кожному елементу a_{ij} заданої трикутної матриці (1) поставимо у відповідність трикутну матрицю з цим елементом у лівому нижньому куті, яку назвемо *рогом* заданої трикутної матриці і позначимо через $R_{ij}(A)$. Очевидно, що ріг $R_{ij}(A)$ є трикутною матрицею $(i-j+1)$–го порядку. В ріг $R_{ij}(A)$ входять тільки ті елементи a_{rs} трикутної матриці (1), індекси яких задовольняють співвідношення $j\leqslant s\leqslant r\leqslant\leqslant i$.

Парафункції трикутних матриць можна розкладати за елементами їх останнього рядка:

$$ddet(A) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \cdot ddet(R_{s-1,1}), \quad (3)$$

$$pper(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} \cdot pper(R_{s-1,1}). \quad (4)$$

Означення 3. [6]. *Скалярним добутком вектора*

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

на парадетермінант трикутної матриці (1) назвемо число

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n \stackrel{def}{=}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} b_r \cdot \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1} \right\}. \quad (5)$$

Аналогічно визначається скалярний добуток вектора на параперманент трикутної матриці.

Скалярним добутком вектора $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ на параперманент трикутної матриці (1) назвемо число

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot pper(A) \stackrel{def}{=} \sum_{r=1}^{n} b_r \times$$

$$\times \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1} \right\}. \quad (6)$$

Розглянемо трикутну матрицю виду

$$A = \begin{pmatrix} \tau_{11} \cdot x_1 z & & & \\ \tau_{21} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} \cdot x_1 z & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ \tau_{n1} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{nn} \cdot x_1 z \end{pmatrix}_n =$$

$$= \left(\tau_{ij} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \cdot z^{\delta_{ij}} \right)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}, \quad (7)$$

тут $x_0 = 1$, τ_{ij} — деякі дробово-раціональні функції аргументів i, j, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Означення 4. [8]. *Многочленами розбиттів назвемо многочлени виду*

$$P(x_1, \ldots, x_n; z) = \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot z^m \times$$

$$\times \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad (8)$$

де λ_i *— цілі невід'ємні числа,* $c(n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *— деякі дробово-раціональні вирази, а* y_m, $m = 1, \ldots, n$ *— компоненти деякого* n*–вимірного вектора.*

Зауваження 1. *Якщо у рівності (8)*

$$y_m \equiv 1,\ m = 1, 2, \ldots, n,$$

то вона матиме вигляд

$$P(x_1, \ldots, x_n; z) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} z^m \cdot \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} c(n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=n} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}. \quad (9)$$

Многочлени виду (9) назвемо *примітивними многочленами розбиттів.*

Теорема 1. [8]. *Добуток вектора на парафункцію трикутної матриці виду (7) є многочленом розбиттів, тобто виконуються рівності:*

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \mathrm{pper}(A) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \quad (10)$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \mathrm{ddet}(A) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} (-1)^{n-m} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \times$$

$$\times x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}. \quad (11)$$

У наступному параграфі досліджуються примітивні многочлени розбиттів, в яких всі компоненти вектора $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ дорівнюють одиниці.

Парафункції трикутних матриць та многочлени розбиттів

Теорема 2. *Рівності*

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccc} \tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{nn}x_1 \end{array} \right\rangle_n \tag{12}$$

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + x_3 y_{n-3} - \ldots +$$
$$(-1)^{n-m-1} x_{n-m} y_m + (-1)^{n-m} \{\tau_{nm}\}_m x_{n-m+1} \times$$
$$\times y_{m-1} + (-1)^{n-m+1} \{\tau_{n,m-1}\}_m x_{n-m+2} y_{m-2} +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1} \{\tau_{n1}\}_m x_n y_0 \tag{13}$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \sum_{i=m}^{n} A(\lambda,\tau,i) \times$$
$$\times \frac{x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}, \tag{14}$$

де $\tau_{ij} = 1$ *при* $m+1 \leqslant j \leqslant n$,

$$A(\lambda,\tau,i) =$$
$$\sum_{r=1}^{m} (k-r)! \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=m, \\ \alpha_j \in \{1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}\}, j=1,\ldots,r}} \lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{\alpha_{r-1}} \lambda_{i-m+\alpha_r} \times$$
$$\times \{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m \prod_{s=1}^{r-1} \{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s, \alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m, \tag{15}$$

причому

$$\underbrace{\lambda_{\alpha_j}\lambda_{\alpha_j} \cdot \ldots \cdot \lambda_{\alpha_j}}_{k} = \lambda_{\alpha_j}^{\underline{k}} =$$
$$= \lambda_{\alpha_j}(\lambda_{\alpha_j} - 1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_{\alpha_j} - k + 1),\ j = 1, \ldots, r$$

рівносильні між собою.

Доведення. Перш за все відзначимо, що рекурентна рівність (13) безпосередньо випливає із рівності (12) в результаті розкладу парадетермінанта за елементами останнього рядка.

Доведемо справедливість рівності (14). Многочлен розбиття, відповідний парадетермінанту трикутної матриці

$$\left\langle \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n},$$

згідно з теоремою 4 із [5], має вигляд

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \times$$
$$\times \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Якщо ж $m = n$, то справедливий наслідок.

Знайдемо коефіцієнт при нормальному m-наборі трикутної матриці правої частини рівності (12). Елемент τ_{ij} факторіального m-добутку $\{\tau_{ij}\}_m$ лежить на $i-j+1$ - ій піддіагоналі трикутної матриці, тому разом з цим добутком до многочлена входитиме змінна x_{i-j+1}. Отже, доданок

$$k! \frac{x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_{i-j+1}^{\lambda_{i-j+1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-j+1}! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!},$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = k$$

отримає вигляд

$$\ldots \lambda_{i-j+1}\{\tau_{ij}\}_m \ldots \cdot k! \cdot \frac{x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_{i-j+1}^{\lambda_{i-j+1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-j+1}! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}.$$

Зробимо заміну $\lambda_1 = \lambda_1^{'}, \ldots, \lambda_{i-j+1} + 1 = = \lambda_{i-j+1}^{'}, \ldots, \lambda_n = \lambda_n^{'}$, тоді останній доданок матиме вигляд

$$\ldots \lambda_{i-j+1}^{'}\{\tau_{ij}\}_m \ldots \cdot (k^{'} - 1)! \times$$
$$\times \frac{x_1^{\lambda_1^{'}} \cdot \ldots \cdot x_{i-j+1}^{\lambda_{i-j+1}^{'}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n{'}}}{\lambda_1^{'}! \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-j+1}^{'}! \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{'}},$$

де $k^{'} = k + 1$.

Якщо ж до нормального m-набору входить ще один факторіальний m-добуток

$\{\tau_{i_1,j_1}\}$, елемент τ_{i_1,j_1} якого лежить на $(i-j+1)$-ій піддіагоналі, тобто виконується рівність $i-j+1=i_1-j_1+1$, то останній одночлен многочлена, очевидно, прийме вигляд

$$\ldots\lambda''_{i-j+1}(\lambda''_{i-j+1}-1)\{\tau_{ij}\}_m\{\tau_{i_1,j_1}\}_m\ldots(k''-2)!\times$$

$$\times\frac{x_1^{\lambda_1''}\cdot\ldots\cdot x_{i-j+1}^{\lambda''_{i-j+1}}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n''}}{\lambda_1''!\cdot\ldots\cdot\lambda''_{i-j+1}!\cdot\ldots\cdot\lambda_n''}.$$

Таким чином, побудувавши при допомозі впорядкованого розбиття

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=m$$

нормальний m-набір трикутної матриці

$$\{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m\prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m,$$

коефіцієнт біля одночлена $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}$ матиме вигляд

$$\sum_{i=m}^{n}A(\lambda,\tau,i),$$

де $A(\lambda,\tau,i)$ задається рівністю (15).

Важливим граничним частинним випадком теореми 2 є наступний

Наслідок 1. *Наступні рівності рівносильні між собою:*

$$y_n=\left\langle\begin{matrix}\tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{nn}x_1\end{matrix}\right\rangle_n \quad (16)$$

$$y_n=\{\tau_{nn}\}x_1y_{n-1}-\{\tau_{n,n-1}\}x_2y_{n-2}+$$
$$+\{\tau_{n,n-2}\}x_3y_{n-3}-\ldots+(-1)^{n-2}\{\tau_{n2}\}x_{n-1}y_1+$$
$$+(-1)^{n-1}\{\tau_{n1}\}x_ny_0 \quad (17)$$

$$y_n=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}A(\lambda,\tau,n)\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}, \quad (18)$$

де

$$A(\lambda,\tau,n)=\sum_{r=1}^{n}(k-r)!\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n,\\ \alpha_i\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},\, i=\overline{1,r}}}\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_r}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{r}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\},$$

або

$$A(\lambda,\tau,n)=\begin{pmatrix}(k-1)!\\(k-2)!\\\vdots\\(k-n)!\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\lambda_1\tau_{11} & & & \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\tau_{21} & \lambda_1\tau_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\tau_{n1} & \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}\tau_{n2} & \ldots & \lambda_1\tau_{nn}\end{bmatrix}, \quad (19)$$

де добуток

$$\underbrace{\lambda_i\cdot\ldots\cdot\lambda_i}_{k}$$

розглядається як спадний факторіальний степінь $\lambda_i^{\underline{k}}$

Доведення. При $m=n$ рівності (12-13), очевидно, перейдуть у рівності (16-17). Покладемо у рівності (14) $m=n$, тоді матимемо

$$\sum_{i=m}^{n}A(\lambda,\tau,i)=A(\lambda,\tau,n),$$

причому

$$\{\tau_{n,n-\alpha_r+1}\}_n=\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r,\alpha_1+\ldots+\alpha_{r-1}+1}\}_n$$

і вона перейде у рівність (18). Те, що $A(\lambda,\tau,n)$ можна подати у вигляді скалярного добутку (19) випливає безпосередньо із означення парадетермінанта та скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці.

Аналогічно формулюються та доводяться відповідні теорема та наслідок для параперманента трикутної матриці.

Теорема 3.

$$y_n=\begin{bmatrix}\tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{nn}x_1\end{bmatrix}_n$$

$$y_n = x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + x_3 y_{n-3} + \ldots + x_{n-m} y_m +$$
$$+ \tau_{nm} x_{n-m+1} y_{m-1} + \tau_{nm}\tau_{n,m-1} x_{n-m+2} y_{m-2} +$$
$$+ \ldots + \tau_{nm}\tau_{n,m-1} \cdot \ldots \cdot \tau_{n1} x_n y_0$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \sum_{i=m}^{n} A(\lambda,\tau,i) \cdot \frac{x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!},$$

де $\tau_{ij} = 1$ *при* $m+1 \leqslant j \leqslant n$,

$$A(\lambda,\tau,i) =$$
$$\sum_{r=1}^{m} (k-r)! \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=m, \\ \alpha_i \in \{1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}\}, i=1,\ldots,r}} \lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{\alpha_{r-1}} \lambda_{i-m+\alpha_r} \times$$
$$\times \{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m \prod_{s=1}^{r-1} \{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s, \alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m \cdot,$$

причому

$$\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{\alpha_k} = \lambda_{\alpha_1}^{\underline{k}} =$$
$$= \lambda_{\alpha_1}(\lambda_{\alpha_1} - 1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_{\alpha_1} - k + 1),$$

якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Riordan J.* An Introduction to Combinatorial Analysis, Wiley, New York, 1958.

2. *Fine N.J.* Sums over partitions. // Report of the Institute in the Theory of Numbers, Boulder. – 1959. – P. 86-94.

3. *Bell E.T.* Partition polynomials. // Ann. Math. – 1927. – **29**. – P. 38–46.

4. *R.Zatorsky, S. Stefluk* On one class of partition polynomials. // ADM. – 2013. – **16**, N1. – P. 127-133.

5. *ЗаторськийР.А.* Парафункції матриць похилої структури та многочлени розбиттів. // Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – **1**, N4. – C. 59-66.

6. *Заторський Р.А.* Скалярний добуток вектора на парадетермінант трикутної матриці та його застосування. // Прикарпатський вісник НТШ. – 2008. – **1**(1). – C. 22-30.

7. *Zatorsky R.A.* On paradeterminants and parapermanents of triangular matrices. (Ukrainian) // Mat. Stud. – 2002. – **17**, N1. – P. 3–17.

8. *Заторський Р.А.* Парадетермінанти і многочлени розбиттів. // УМЖ. – 2008. – **60**, N11. – C. 1457-1469.

9. *Zatorsky R.A.* Calculus of Triangular Matrices and its Applications [in Ukrainian], Simyk, Ivano-Frankivsk (2010) 508 p.