

РАТУШНЯК С.П.

НЕПЕРЕРВНА НІДЕ НЕ МОНОТОННА ФУНКЦІЯ, ОЗНАЧЕНА В
ТЕРМІНАХ ЛАНЦЮГОВОГО A_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Розглядається скінченний клас функцій, визначених параметрами e_0, e_1, e_2 , що належать множині $A = \{0, 1\}$, цифри нескінченного ланцюгового A_2 -зображення аргумента

$$x = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots}}} \equiv \Delta_{a_1 \dots a_n \dots}^A,$$

де $\alpha_n \in \{\frac{1}{2}; 1\}$, $a_n = 2\alpha_n - 1$, $n \in N$, і значення функції яких перебувають у рекурентній залежності, а саме:

$$f(x = \Delta_{a_1 \dots a_n \dots}^A) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n \dots}^A,$$

$$b_1 = \begin{cases} e_0 & \text{при } (a_1, a_2) = (e_1, e_2), \\ 1 - e_0 & \text{при } (a_1, a_2) \neq (e_1, e_2), \end{cases}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}), \\ 1 - b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) = (a_{2k-1}, a_{2k}). \end{cases}$$

У статті обґрунтовується коректність означення функції, її неперервність та ніде не монотонність. Вивчено варіаційні властивості функції та доведено необмеженість її варіації.

Ключові слова і фрази: ланцюгове A_2 -зображення чисел, A -зображення чисел, неперервна ніде не монотонна функція, функція необмеженої варіації, циліндри ланцюгового зображення чисел.

Institution of mathematics of NAS Ukraine,
Ukrainian State Dragomanov University, Kyiv, Ukraine
e-mail: ratush404@gmail.com

ВСТУП

Неперервні ніде не монотонні функції у метричному просторі $C[0; 1]$ утворюють множину другої категорії Бера, що є наслідком відомої теореми Банаха-Мазуркевича [7] про масивність множини неперервних ніде не диференційовних функцій, оскільки ніде не монотонність є необхідною умовою недиференційовності, тобто у топологічному

УДК 511.7+519.21

2010 *Mathematics Subject Classification*: 28A80, 11K50, 26A27, 26A30.

сенсі майже кожна функція цього простору є ніде не монотонною. Серед ніде не монотонних функцій є функції обмеженої та необмеженої варіації. Необмеженість варіації є необхідною умовою недиференційовності, оскільки функції обмеженої варіації є різницею двох зростаючих функцій. Інтерес до неперервних ніде не монотонних функцій в останній час суттєво зріс [6, 8, 9] завдяки розвитку фрактального аналізу, оскільки переважна більшість з них мають фрактальні властивості [2] в тому чи іншому сенсі (фрактальний графік, фрактальні рівні, фрактальні множини особливостей тощо).

Переважає більшість вивчених ніде не монотонних функцій мають самоафінні графіки, що спрощує вивчення їх властивостей. Несамоподібні системи зображення чисел [5], в першу чергу, зі скінченим алфавітом, які використовуються при заданні і дослідженні функцій, вимагають суттєво тонкіших міркувань при вивченні властивостей функції [3].

У даній роботі для означення та дослідження функції ми використовуємо нескінченні ланцюгові дроби, елементами яких є числа $\frac{1}{2}$ та 1. Вони уже знайшли своє застосування у метричній теорії чисел [1, 3], теорії розподілів випадкових величин (в першу чергу сингулярних) [4], у конструктивній теорії локально складних функцій з фрактальними властивостями.

1 ЛАНЦЮГОВЕ A_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА $[\frac{1}{2}; 1]$

Нехай $A \equiv \{0; 1\}$ — алфавіт, $L \equiv A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць); $A_2 = \{\frac{1}{2}; 1\}$, $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$.

Відомо [1], що для будь-якого $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ існує послідовність $(a_k) \in L_2$ така, що

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]. \quad (1)$$

Нескінченний ланцюговий дріб (1) називається *ланцюговим A_2 -дробом*, а його символічний запис $[0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$ — *A_2 -зображенням числа x* .

Існують числа, що мають два A_2 -зображення, оскільки $[0; a_1, a_2, \dots, a_m, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = [0; a_1, a_2, \dots, a_m, 1, (1, \frac{1}{2})]$, решта чисел мають єдине A_2 -зображення (тут круглі дужки символізують період). Їх називають *A_2 -бінарними числами*. Решта чисел мають єдине зображення. Їх називають *A_2 -унарними числами*. Множина A_2 -бінарних чисел є зліченною всюди щільною у відрізку $[\frac{1}{2}; 1]$.

A_2 -зображення легко перекодується засобами алфавіту A , а саме:

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^A,$$

де $\alpha_k = 2a_k - 1, k \in \mathbb{N}$. Останнє називається *A -зображенням числа x* .

A -циліндром рангу t з основою $c_1 \dots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1 \dots c_m}^A$ усіх чисел x , що мають зображення $x = \Delta_{c_1 \dots c_m \beta_1 \beta_2 \dots}^A$, де $(\beta_n) \in L$.

Безпосередньо з наведеного означення A -циліндра маємо

$$1) \Delta_{c_1 \dots c_m}^A = \Delta_{c_1 \dots c_m 0}^A \cup \Delta_{c_1 \dots c_m 1}^A; [\frac{1}{2}; 1] = \bigcup_{c_1 \in \{0, 1\}} \dots \bigcup_{c_m \in \{0, 1\}} \Delta_{c_1 \dots c_m}^A.$$

2) A -циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^A$ є відрізком з кінцями: $\Delta_{c_1 \dots c_m(01)}^A$ і $\Delta_{c_1 \dots c_m(10)}^A$, причому який з них лівий, а який правий залежить від парності (непарності) числа m .

2) довжина циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_m}^A$ обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1 \dots c_m}^A| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)} \leq \frac{1}{q_{m-1}^2},$$

де q_m — знаменник m -го порядку підхідного дробу, тобто знаменник раціонального числа, що є значенням виразу $[0; a_1, a_2, \dots, a_m]$, який обчислюється за формулами $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, де $a_n = \frac{c_n+1}{2}$;

3) основне метричне відношення

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m c}^A|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^A|} = \frac{1 + a \frac{q_{m-1}}{q_m}}{2a^2 + 1 + 2a \frac{q_{m-1}}{q_m}}, \quad a = \frac{c+1}{2},$$

зокрема

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m 0}^A|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^A|} = \frac{2 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{3 + 2 \frac{q_{m-1}}{q_m}}, \quad \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m 1}^A|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^A|} = \frac{1 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{3 + 2 \frac{q_{m-1}}{q_m}}.$$

2 ОСНОВНИЙ ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нехай (e_0, e_1, e_2) — фіксована упорядкована трійка елементів алфавіту A . Означимо функцію f рівностями

$$f(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^A) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^A, \quad \text{де} \quad (2)$$

$$b_1 = \begin{cases} e_0 & \text{при } (a_1, a_2) = (e_1, e_2), \\ 1 - e_0 & \text{при } (a_1, a_2) \neq (e_1, e_2), \end{cases} \quad (3)$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}), \\ 1 - b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) = (a_{2k-1}, a_{2k}). \end{cases} \quad (4)$$

Якщо $e_0 = 0$, то $1 = f(\Delta_{(e_1 e_2)}^A)$, $0 = f(\Delta_{([1-e_1][1-e_2])}^A) = f(\Delta_{(e_1[1-e_2])}^A) = f(\Delta_{([1-e_1]e_2)}^A)$.

Якщо $e_0 = 1$, то $0 = f(\Delta_{(e_1 e_2)}^A)$, $1 = f(\Delta_{([1-e_1][1-e_2])}^A) = f(\Delta_{(e_1[1-e_2])}^A) = f(\Delta_{([1-e_1]e_2)}^A)$, тобто $f(\Delta_{(e_1 e_2)}^A) = 1 - e_0$, $f(\Delta_{([1-e_1][1-e_2])}^A) = f(\Delta_{(e_1[1-e_2])}^A) = f(\Delta_{([1-e_1]e_2)}^A) = e_0$, $e_0 \in A$.

Лема 1. Означення функції рівностями (2), (3) і (4) є коректним.

Доведення. Коректність означення функції f може порушуватися в A -бінарних точках, а саме якщо має місце нерівність: $f(\Delta_{a_1 \dots a_m 0(01)}^A) \neq f(\Delta_{a_1 \dots a_m 1(10)}^A)$, $m \in \mathbb{N}$.

Нехай e_0, e_1, e_2 — фіксовані параметри з A . Розглянемо довільне A -бінарне $x_0 \in [\frac{1}{2}; 1]$. Тоді воно має зображення $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_m 0(01)}^A = \Delta_{a_1 \dots a_m 1(10)}^A$. Можливі випадки: $m = 2k - 1$ або $m = 2k$. Нехай $m = 2k - 1$ і $y_1 = f(x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} 0(01)}^A) = \Delta_{b_1 \dots b_k(b_k[1-b_k])}^A$. Тоді $y_2 = f(x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} 1(10)}^A) = \Delta_{b_1 \dots b'_k(b'_k[1-b'_k])}^A$.

Якщо $(a_{2k-1}, 1) \neq (a_{2k-3}, a_{2k-2}) \neq (a_{2k-1}, 0)$, то $b_k = b'_k$, а тому $y_1 = y_2$. Аналогічна ситуація матиме якщо $(a_{2k-1}, 1) = (a_{2k-3}, a_{2k-2}) = (a_{2k-1}, 0)$.

Якщо $(a_{2k-1}, 1) = (a_{2k-3}, a_{2k-1}) \neq (a_{2k-1}, 0)$, то $b'_k = 1 - b_k$ і $y_1 = y_2$ як значення двох різних A -бінарних зображень одного й того ж числа. Аналогічна ситуація матиме місце за умови, що $(a_{2k-1}, 1) \neq (a_{2k-3}, a_{2k-1}) = (a_{2k-1}, 0)$.

Нехай $m = 2k$ і $y_1 = f(x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} a_{2k} 0(01)}^A) = \Delta_{b_1 \dots b_k b_{k+1} (b_{k+1} [1-b_{k+1}])}^A$. Тоді $y_2 = f(\Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} a_{2k} 1(10)}^A) = \Delta_{b_1 \dots b_k b_{k+1} (b'_{k+1} [1-b'_{k+1}])}^A$.

Якщо $(0, 0) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}) \neq (1, 1)$, то $b_{k+1} = b'_{k+1}$, а тому $y_1 = y_2$. Аналогічна ситуація матиме місце якщо $(0, 0) = (a_{2k-1}, a_{2k}) = (1, 1)$.

Якщо $(0, 0) = (a_{2k-1}, a_{2k}) \neq (1, 1)$, то $b'_k = 1 - b_k$ і $y_1 = y_2$ як значення двох різних A -бінарних зображень одного й того ж числа. Аналогічна ситуація матиме місце за умови, що $(0, 0) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}) = (1, 1)$.

Отже, означення функції рівностями (2), (3) і (4) при довільній трійці $(e_0, e_1, e_2) \in A^3$ є коректним. $\square$

Зауваження 1. Якщо в означенні функції f змінити умову (4) на умову

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) = (a_{2k-1}, a_{2k}), \\ 1 - b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}), \end{cases} \quad (5)$$

то отримаємо новий клас функцій, коректність означення яких вимагатиме домовленості використовувати лише одне з двох A -бінарних зображень.

Теорема 1. Функція f , означена рівностями (2)–(4), є неперервною і ніде не монотонною.

Доведення. Покажемо неперервність f у довільно вибраній A -унарній точці $x_0 = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \dots}^A$. Нехай $f(x_0) = \Delta_{b_1 \dots b_m \dots}^A$. Якщо $x \neq x_0$, то існує номер k такий, що $a_k(x) \neq a_k(x_0)$, але $a_i(x) = a_i(x_0)$ $i = 1, k-1$, причому умова $x \rightarrow x_0$ рівносильна умові $k \rightarrow \infty$. З означення функції бачимо, що для довільного достатньо близького до x_0 числа x існує m , таке що $f(x) \in \Delta_{b_1 \dots b_m}^A$. Тоді

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |\Delta_{b_1 \dots b_m}^A|.$$

Оскільки $|\Delta_{b_1 \dots b_m}^A| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta_{b_1 \dots b_m}^A| = 0.$$

Тому $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Таким чином функція f є неперервною в точці x_0 . Оскільки x_0 — довільна A -унарна точка, то функція f неперервна на всій множині A -унарних чисел.

Неперервність функції у кожній A -бінарній точці є наслідком коректності означення функції в A -бінарних точках, оскільки аналогічно до попереднього доводиться неперервність функції f в такій точці зліва і справа. Отже, f неперервна на всій області визначення.

Для доведення ніде не монотонності функції f досить довести, що вона немонотонна в довільному інтервалі, але для довільного інтервалу легко вказати A -циліндр, що

цілком йому належить. Тому достатньо довести немонотонність функції на довільному циліндрі. Розглянемо три точки одного циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m}}^A$:

$$x_1 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m} 0011(0)}, \quad x_2 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m}}^A(0), \quad x_3 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m} 0001(0)}.$$

Згідно правил порівняння чисел за їх A -зображеннями маємо, що $x_1 < x_2 < x_3$. Тоді

$$f(x_1) = \Delta_{b_1 \dots b_m e e(e[1-e])}^A, \quad f(x_2) = \Delta_{b_1 \dots b_m(e[1-e])}^A, \quad f(x_3) = \Delta_{b_1 \dots b_m e e(e[1-e])}^A,$$

де $f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m} 00}^A) = \Delta_{b_1 \dots b_m e}^A$, $c_i \in A$, $b_n \in A$, $i = \overline{1, 2m}$, $n = \overline{1, m}$, $e \in A$. Звідки бачимо, що $(f(x_1) - f(x_2))(f(x_2) - f(x_3)) < 0$, а тому на циліндрі $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m}}^A$ функція f немонотонна. В силу довільності вибору циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{2m}}^A$ функція f є ніде не монотонною на усій області визначення. $\square$

Лема 2. Образом A -циліндра $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{2k}}^A$ парного рангу $2k$ під дією функції $f \in A$ -циліндр $\Delta_{b_1 \dots b_k}^A$ рангу k , причому кількість прообразів циліндра $\Delta_{b_1 \dots b_k b_{k+1}}^A$ дорівнює

$$N_{k+1} \equiv N(\Delta_{b_1 \dots b_k b_{k+1}}^A) = 3^{k - \sum_{i=1}^k |b_{i+1} - b_i| + |b_1 - e_0|}. \quad (6)$$

Доведення. Розглянемо циліндр $\Delta_{a_1 \dots a_{2k}}^A$ і точку, що йому належить $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k} \alpha_1 \alpha_2 \dots}^A$. Нехай $y_0 = f(x_0) = \Delta_{b_1 \dots b_k \beta_1 \dots}^A$. Зрозуміло, що $y_0 \in \Delta_{b_1 \dots b_k}^A$. Покажемо, що існують точки циліндра $\Delta_{a_1 \dots a_{2k}}^A$, образ яких є кінцями циліндра $\Delta_{b_1 \dots b_k}^A$. Такими є точки

$$x_1 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} a_{2k} (a_{2k-1} [1-a_{2k}] a_{2k-1} a_{2k})}^A \quad \text{і} \quad x_2 = \Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} a_{2k} a_{2k-1} a_{2k} (a_{2k-1} [1-a_{2k}])}^A,$$

оскільки

$$f(x_1) = \Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} a_{2k} (a_{2k-1} [1-a_{2k}] a_{2k-1} a_{2k})}^A = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} b_k (b_k)}^A, \\ f(x_2) = \Delta_{a_1 \dots a_{2k-1} a_{2k} a_{2k-1} a_{2k} (a_{2k-1} [1-a_{2k}] a_{2k-1} a_{2k})}^A = \Delta_{b_1 \dots b_{k-1} b_k (1-b_k)}^A.$$

В силу неперервності функції f , циліндр $\Delta_{a_1 \dots a_{2k}}^A$ повністю відобразиться в $\Delta_{b_1 \dots b_k}^A$.

Для доведення другої частини леми використаємо метод математичної індукції. Прообразами циліндрів 1-го рангу є:

$$f^{-1}(\Delta_{e_0}^A) = \Delta_{e_1 e_2}^A, \quad f^{-1}(\Delta_{[1-e_0]}^A) = \{\Delta_{[1-e_1] e_2}^A, \Delta_{e_1 [1-e_2]}^A, \Delta_{[1-e_1] [1-e_2]}^A\}.$$

Прообразами циліндрів 2-го рангу є:

$$f^{-1}(\Delta_{e_0 e_0}^A) = \{\Delta_{e_1 e_2 [1-e_1] e_2}^A, \Delta_{e_1 e_2 e_1 [1-e_2]}^A, \Delta_{e_1 e_2 [1-e_1] [1-e_2]}^A\}, \quad f^{-1}(\Delta_{e_0 [1-e_0]}^A) = \{\Delta_{e_1 e_2 e_1 e_2}^A\}; \\ f^{-1}(\Delta_{[1-e_0] e_0}^A) = \{\Delta_{[1-e_1] e_2 [1-e_1] e_2}^A, \Delta_{e_1 [1-e_2] e_1 [1-e_2]}^A, \Delta_{[1-e_1] [1-e_2] [1-e_1] [1-e_2]}^A\}, \\ f^{-1}(\Delta_{[1-e_0] [1-e_0]}^A) = \{\Delta_{[1-e_1] e_2 e_1 e_2}^A, \Delta_{[1-e_1] e_2 e_1 [1-e_2]}^A, \Delta_{[1-e_1] e_2 [1-e_1] [1-e_2]}^A, \Delta_{e_1 [1-e_2] e_1 e_2}^A, \\ \Delta_{e_1 [1-e_2] [1-e_1] [1-e_2]}^A, \Delta_{e_1 [1-e_2] [1-e_1] e_2}^A, \Delta_{[1-e_1] [1-e_2] e_1 e_2}^A, \Delta_{[1-e_1] [1-e_2] [1-e_1] e_2}^A, \Delta_{[1-e_1] [1-e_2] e_1 e_2}^A\}.$$

При $k = 1$ рівність (6) виконується.

Припустимо, що вона виконується для $k = n$. Розглянемо при $k = n + 1$. Циліндр $\Delta_{b_1 \dots b_n}^A$ згідно з припущенням має N_n прообразів. Якщо $b_{n+1} \neq b_n$, то кількість прообразів не зміниться, оскільки

$$N_n = 3^{n-1 - \sum_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} - b_i| + |b_1 - e_0|} = 3^{n - \sum_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} - b_i| - |b_{n+1} - b_n| + |b_1 - e_0|} = N_{n+1}.$$

Якщо $b_{n+1} = b_n$, то згідно означення функції $N(\Delta_{b_1 \dots b_n b_{n+1}}^A) = 3N(\Delta_{b_1 \dots b_n}^A)$, тобто

$$N_{n+1} = 3^{n-1 - \sum_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} - b_i| + |b_1 - e_0| + 1} = 3^{n - \sum_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} - b_i| - |b_{n+1} - b_n| + |b_1 - e_0|} = 3^{n - \sum_{i=1}^n |b_{i+1} - b_i| + |b_1 - e_0|}.$$

Лему доведено. $\square$

Зауваження 2. Легко показати, що коли $\Delta_{b_1 \dots b_m}^A = f(\Delta_{a_1 \dots a_{2m}}^A)$, то найменше і найбільше значення функції f на циліндрі $\Delta_{a_1 \dots a_{2m}}^A$ дорівнює $\min \Delta_{b_1 \dots b_m}^A$ і $\max \Delta_{b_1 \dots b_m}^A$. Таким чином, коливання (різниця максимуму і мінімуму) функції f на A -циліндрі парного рангу дорівнює довжині його образу.

Теорема 2. Функція f має необмежену варіацію.

Доведення. Варіація $V(f)$ функції f є більшою ніж сумарна довжина V_k образів усіх A -циліндрів рангу $2k$ для будь-якого $k \in N$, тобто

$$V(f) > V_k = \sum_{a_1=0}^1 \sum_{a_2=0}^1 \dots \sum_{a_{2k}=0}^1 |f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{2k}}^A)|.$$

Враховуючи, що існує лише один A -циліндр 2-го рангу $\Delta_{e_0[1-e_0]}^A$, що є образом циліндра 4-го рангу $\Delta_{e_1 e_2 e_1 e_2}^A$, а решта циліндрів є образом принаймні трьох циліндрів 4-го рангу, то

$$V_2 > \frac{3}{2} - |f(\Delta_{e_1 e_2 e_1 e_2}^A)| > 1.$$

Аналогічно міркуючи стосовно довільного циліндра $\Delta_{a_1 \dots a_8}^A$ 8-го рангу, маємо $V_4 > 1$.

За індукцією $V_{4k} > 1$, а тому $\lim_{k \rightarrow \infty} V_{4k} = \infty$, отже, f має необмежену варіацію. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] S. O. Dmytrenko, D. V. Kyurchev, M. V. Prats'ovytyi A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] M.V. Pratsiovytyi, Ya.V. Goncharenko, S.O. Dmytrenko, I.M. Lysenko, S.P. Ratushniak, About one class of function with fractal properties // Bukovynian Mathematical Journal. 2021, T. 6, № 1 — P.273–283. (in Ukrainian)
- [3] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. Continued A_2 -fractions and singular functions // Mat. Stud., 58, 2022. — С.3–12.
- [4] Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S. Continuous distributions whose functions preserve tails of A -continued fraction representation of numbers// Random Operators and Stochastic Equations. 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199–206.
- [5] Працьовитий М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316с.
- [6] Працьовитий М.В. Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2011.— №12. — С. 24–36.
- [7] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

- [8] *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Неперервна нїде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2 -зображення // *Нелінійні коливання*, Т.23. №2, 2020. — С.231–252.
- [9] *Працьовитий М.В., Чуйков А.С.* Неперервна нїде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових A_2 -дробів. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2018. Т.15, № 1. С. 147–161.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] *S. O. Dmytrenko, D. V. Kyurchev, M. V. Prats'ovtyi* A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] *M.V. Pratsiovytyi, Ya.V. Goncharenko, S.O. Dmytrenko, I.M. Lysenko, S.P. Ratushniak*, About one class of function with fractal properties // *Bukovynian Mathematical Journal*. 2021, Т. 6, № 1 — P.273–283. (in Ukrainian)
- [3] *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P.* Continued A_2 -fractions and singular functions // *Mat. Stud.*, 58, 2022. — P.3–12.
- [4] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S.* Continuous distributions whose functions preserve tails of A-continued fraction representation of numbers// *Random Operators and Stochastic Equations*. 2019. Vol. 27 (3). Pp. 199–206.
- [5] *Pratsiovytyi M.V.* Two-symbol encoding systems of real numbers and their application. — Kyiv: Scientific opinion, 2022. — 316 p. (in Ukrainian)
- [6] *Pratsiovytyi M.V.* There are no monotonic singular functions // *Scientific journal of M.P. Dragomanov National University. Series 1. Phys.-math. of science*, 2011.— №12. — P. 24–36. (in Ukrainian)
- [7] *Pratsiovytyi M.V.* Fractal approach in the study of singular distributions. — Kyiv: M.P. Dragomanova NPU, 1998. — 296 p. (in Ukrainian)
- [8] *Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P.* A continuous nowhere differentiable function with fractal properties defined in terms of Q_2 -image // *Nonlinear Oscillations*, Vol.23. №2, 2020. — P.231–252. (in Ukrainian)
- [9] *Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S.* A continuous nowhere non-monotonic function defined in terms of negative-triple and chain A_2 -fractions. *Coll. Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*. 2018. Vol.15, № 1. P. 147–161. (in Ukrainian)

Надійшло 23.09.2023

Ratushniak S.P. *Continuous nowhere monotonic function defined it term continued A_2 -fractions representation of numbers*, *Bukovinian Math. Journal*. **11**, 1 (2023), 126–133.

We consider finite class of functions defined by parameters e_0, e_1, e_2 belonging to the set $A = \{0, 1\}$. The digits of the continued fraction A_2 -representation of the argument

$$x = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\ddots}}} \equiv \Delta_{a_1 \dots a_n \dots}^A,$$

where $\alpha_n \in \{\frac{1}{2}; 1\}$, $a_n = 2\alpha_n - 1$, $n \in N$, and the values of the function are in a recursive dependence, namely:

$$f(x = \Delta_{a_1 \dots a_{2n} \dots}^A) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n \dots}^A,$$

$$b_1 = \begin{cases} e_0 & \text{if } (a_1, a_2) = (e_1, e_2), \\ 1 - e_0 & \text{if } (a_1, a_2) \neq (e_1, e_2), \end{cases}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{if } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}), \\ 1 - b_k & \text{if } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) = (a_{2k-1}, a_{2k}). \end{cases}$$

In the article, we justify the well-defined of the function, continuous and nowhere monotonic function. The variational properties of the function were studied and the unbounded variation was proved.