

©2000 р. І.П. Мединський*, С.Д. Івасишен

*Державний університет "Львівська політехніка", Львів
Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці**ПРО КОРЕКТНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ**

Установлена коректна розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині в спеціальних вагових просторах Гельдера.

The correct resolvability of parabolic systems with degenerations on the initial hyperplane in special weight spaces is established.

В [1–3] побудована й досліджена фундаментальна матриця розв'язків (ф.м.р.) задачі Коші для параболічних систем рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині. Тут ці результати застосовуються до встановлення коректної розв'язності таких систем у спеціальних вагових просторах Гельдера.

1. Використовуватимемо такі позначення: n, b, N — задані натуральні числа; T — задане додатне число; $\alpha, \beta : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ — неперервні функції такі, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ і $\beta(t) > 0$ для $t > 0$, β монотонно неспадна; $q \equiv 2b/(2b-1)$; $\Pi_H \equiv \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbf{R}^n\}$, $H \subset [0, \infty)$; $\mathbf{C}_N$ — сукупність усіх стовпців висоти N , елементами яких є комплексні числа; $A(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$,

$$B(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta, \quad E^d(t, \tau) \equiv \exp\{dA(t, \tau)\},$$

$E_c(t, \tau, x) \equiv \exp\{-c(B(t, \tau))^{1-q}|x|^q\}$, $E_c^d(t, \tau, x) \equiv E_c(t, \tau, x)E^d(t, \tau)$; $\Delta_t' f(t, \cdot) \equiv f(t, \cdot) - f(t', \cdot)$, $\Delta_x' f(\cdot, x) \equiv f(\cdot, x) - f(\cdot, x')$, $\Delta_{t,x}' f(t, x, \cdot) \equiv f(t, x, \cdot) - f(t', x', \cdot)$; $t \leq t'$; I — одинична матриця порядку N ; $p(t, x; t', x') \equiv ((A(t', t))^{1/b} + |x - x'|^2)^{1/2}$ — спеціальна відстань між точками (t, x) і (t', x') ; η — характеристична функція проміжку $[0, \infty)$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)) \times$$

$$\times \sum_{1 \leq |k| \leq 2b} a_k(t, x) \partial_x^k - a_0(t, x) u(t, x) = f(t, x),$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (1)$$

при таких припущеннях:

1) вираз $I\partial_t - \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t, x) \partial_x^k$ рівномірно параболічний за Петровським в $\Pi_{[0, T]}$;

2) коефіцієнти $a_k, |k| \leq 2b$, обмежені й неперервні за t в $\Pi_{[0, T]}$ (при цьому неперервність $a_k, |k| = 2b$, рівномірна відносно $x \in \mathbf{R}^n$), а також задовольняють у $\Pi_{[0, T]}$ рівномірну умову Гельдера за x з показником $\gamma \in (0, 1)$;

3) $\exists C > 0 \forall \{t, t'\} \subset (0, T], t < t', \forall x \in \mathbf{R}^n \forall k, |k| \leq 2b: |\Delta_t' a_k(t, x)| \leq C(A(t', t))^{\gamma/(2b)}$.

За умов 1) і 2) в [1, 2] доведено існування ф.м.р. Z задачі Коші для системи (1), для якої правильні оцінки

$$|\partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C(B(t, \tau))^{-(n+|k|)/(2b)} E_c^d(t, \tau, x - \xi), \quad (2)$$

$$|\Delta_x' \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leq C|x - x'|^{\gamma} (B(t, \tau))^{-(n+|k|+\gamma)/(2b)} \times \\ \times (E_c^d(t, \tau, x - \xi) + E_c^d(t, \tau, x' - \xi)), \quad (3)$$

$0 < \tau < t \leq T, \{x, x', \xi\} \subset \mathbf{R}^n, |k| \leq 2b$, з деякими сталими $C > 0, c > 0$ і $d \in \mathbf{R}$.

Якщо виконується ще й умова 3), то в [3] доведена правильність також таких оцінок:

$$|\Delta_{t,x}' \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leq$$

$$\leq C(p(t, x; t', x'))^\gamma (B(t, \tau))^{-(n+|k|+\gamma)/(2b)} \times \\ \times (E_c^d(t, \tau, x - \xi) + E_c^d(t', \tau, x' - \xi)), \quad (4)$$

$$\left| \partial_x^k \int_{\mathbf{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) d\xi \right| \leq \\ \leq C E^d(t, \tau) (B(t, \tau))^{-(|k|-\gamma)/(2b)}, \quad (5)$$

$$\left| \Delta_{t,x}^{t',x'} \partial_x^k \int_{\mathbf{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) d\xi \right| \leq \\ \leq C(p(t, x; t', x'))^\gamma (B(t, \tau))^{-|k|/(2b)} E^d(\tilde{t}, \tau), \quad (6) \\ 0 < \tau < t \leq t' \leq T, \{x, x', \xi\} \subset \mathbf{R}^n, 1 \leq |k| \leq 2b, \text{ де } \tilde{t} \equiv t + \eta(d)(t' - t).$$

2. Ф.м.р. Z породжує об'ємний потенціал

$$u(t, x) \equiv \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbf{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \\ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \quad (7)$$

Його властивості, а отже, і розв'язків системи (1), описуватимуться належністю функції u до відповідних просторів у залежності від того, до яких просторів належить функція f . Означимо ці простори.

Крім функцій α і β , використовуватимемо ще неперервну і монотонно неспадну функцію $\delta : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ таку, що

$$\forall t \in (0, T] : \quad 0 < \delta(t) \leq \beta(t), \\ \Delta(T, 0) \equiv \int_0^T \frac{\delta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta < \infty. \quad (8)$$

Розглядатимемо простори функцій, які є неперервними або мають потрібну гладкість та задовольняють певні умови при $t \rightarrow 0$ і $|x| \rightarrow \infty$. Їх поведінка при $t \rightarrow 0$ описуватиметься функцією

$$(\delta(t))^\mu (\Delta(t, 0))^r E^{-d}(T, t), \quad t \in (0, T],$$

а при $|x| \rightarrow \infty$ — функцією

$$\Psi(t, x) \equiv \exp\{k(t)|x|^q\}, \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]},$$

де $\mu \in \{0, 1\}$; $r \in \mathbf{R}$; $k(t) \equiv c_0 a (c_0^{2b-1} - (T - B(T, t))a^{2b-1})^{1-q}$, $t \in [0, T]$ (при цьому $k(0) \equiv 0$, якщо $B(T, 0) = \infty$), c_0 — фіксоване число з проміжку $(0, c)$, c — стала з оцінок (2)–(6), а число a таке, що $0 \leq a < c_0 T^{1-q}$.

Функція k монотонно зростає від $k(0)$ до $k(T)$ і має таку властивість [2]:

$$E_{c_0}(t, \tau, x - \xi) \Psi(\tau, \xi) \leq \Psi(t, x), \\ 0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n. \quad (9)$$

Для заданих чисел $\lambda \in (0, 1)$, $\mu \in \{0, 1\}$ і $r \in \mathbf{R}$ позначимо через $C_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $C_{\mu,r}^{\lambda,0}$ і $C_{\mu,r}^{0,0}$ простори неперервних функцій $u : \Pi_{(0,T]} \rightarrow \mathbf{C}_N$, для яких скінченні відповідно норми

$$\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)} \equiv \|u\|_{\mu,r}^{0,0} + [u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)},$$

$$\|u\|_{\mu,r}^{\lambda,0} \equiv \|u\|_{\mu,r}^{0,0} + [u]_{\mu,r}^{\lambda,0}$$

і $\|u\|_{\mu,r}^{0,0}$, де

$$\|u\|_{\mu,r}^{0,0} \equiv \sup_{(t,x) \in \Pi_{(0,T]}} \frac{|u(t, x)| E^d(T, t)}{\Psi(t, x) (\delta(t))^\mu (\Delta(t, 0))^r},$$

$$[u]_{\mu,r}^{\lambda,\lambda/(2b)} \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\} \subset \Pi_{(0,T]} \\ (t,x) \neq (t',x')}} \left(\frac{|\Delta_{t,x}^{t',x'} u(t, x)| E^d(T, \tilde{t})}{(\delta(t))^\mu (\Delta(\tilde{t}, 0))^{r-\lambda/(2b)}} \times \right.$$

$$\left. \times (\Psi(t, x) + \Psi(t', x'))^{-1} (p(t, x; t', x'))^{-\lambda} \right),$$

$$[u]_{\mu,r}^{\lambda,0} \equiv \sup_{\substack{\{x,x'\} \subset \mathbf{R}^n \\ x \neq x'}} \left(\frac{|\Delta_x^{x'} u(t, x)| E^d(T, t)}{(\delta(t))^\mu (\Delta(t, 0))^{r-\lambda/(2b)}} \times \right.$$

$$\left. \times (\Psi(t, x) + \Psi(t, x'))^{-1} |x - x'|^{-\lambda} \right).$$

Тут $\tilde{t} \equiv t + (t' - t)\eta(r - \lambda/(2b))$, $\tilde{t} \equiv t + (t' - t)\eta(d)$ і стала d з оцінок (2)–(6).

За допомогою означених просторів уведемо простір $U_r^{\gamma,\lambda}$. Він складається з функцій $u \in C_{0,r+1}^{0,0}$, які мають похідні $\partial_x^k u \in C_{0,r+1-|k|/(2b)}^{\gamma,\gamma/(2b)}$, $0 < |k| < 2b$, та похідні $\partial_x^k u \in C_{0,r}^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $|k| = 2b$. Норма в просторі $U_r^{\gamma,\lambda}$ визначається формулою

$$\|u\|_{U_r^{\gamma,\lambda}} \equiv \|u\|_{0,r+1}^{0,0} +$$

$$+ \sum_{0 < |k| < 2b} \|\partial_x^k u\|_{0, r+1-|k|/(2b)}^{\gamma, \gamma/(2b)} + \sum_{|k|=2b} \|\partial_x^k u\|_{0, r}^{\lambda, \lambda/(2b)}.$$

3. Наведемо теорему про коректну розв'язність системи (1).

Теорема. *Нехай для системи (1) виконуються припущення 1) – 3) та $f \in C_{1, r}^{\lambda, 0}$ з $\lambda < \gamma$ і $r > \gamma/(2b)$. Тоді функція (7) є єдиним розв'язком системи (1) з простору $U_r^{\gamma, \lambda}$, для якого правильна оцінка*

$$\|u\|_{U_r^{\gamma, \lambda}} \leq C \|f\|_{1, r}^{\lambda, 0}. \quad (10)$$

Доведення. З властивостей ф.м.р. [1, 2] випливає, що функція (7) є регулярним у $\Pi_{(0, T]}$ розв'язком системи (1), причому похідні від u обчислюються за формулами

$$\partial_x^k u(t, x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad |k| < 2b, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^k u(t, x) &= \int_0^{t_1} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \\ &+ \int_{t_1}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^x f(\tau, \xi) d\xi + \\ &+ \int_{t_1}^t \left(\partial_x^k \int_{\mathbf{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) d\xi \right) f(\tau, x) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad |k| = 2b, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (12) \end{aligned}$$

де t_1 — число з проміжку $(0, t)$, вибір якого вкажемо нижче.

Доведемо, що розв'язок (7) належить до простору $U_r^{\gamma, \lambda}$.

Використовуючи позначення

$$I_\nu^r(t_1, t_2, t_3) \equiv \int_{t_1}^{t_2} (B(t_3, \tau))^{-\nu} (\Delta(\tau, 0))^r \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau,$$

$$t_1 \in [0, T], \quad \{t_2, t_3\} \subset (0, T], \quad (13)$$

і рівність

$$\int_{\mathbf{R}^n} (B(t, \tau))^{-n/(2b)} E_{c-c_0}(t, \tau, x - \xi) d\xi = C,$$

$$0 < \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (14)$$

за допомогою (2), (8), (9), (11) та означення норми $\|f\|_{1, r}^{0, 0}$ маємо

$$\begin{aligned} |\partial_x^k u(t, x)| &\leq C \int_0^t (B(t, \tau))^{-(n+|k|)/(2b)} E^d(t, \tau) \times \\ &\times E^{-d}(T, \tau) (\Delta(\tau, 0))^r \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \times \\ &\times \int_{\mathbf{R}^n} E_{c-c_0}(t, \tau, x - \xi) (E_{c_0}(t, \tau, x - \xi) \Psi(\tau, \xi)) \times \\ &\times \frac{|f(\tau, \xi)| E^d(T, \tau)}{\Psi(\tau, \xi) \delta(\tau) (\Delta(\tau, 0))^r} d\xi \leq \\ &\leq C E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) \|f\|_{1, r}^{0, 0} \times \\ &\times I_{|k|/(2b)}^r(0, t, t), \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad |k| < 2b. \quad (15) \end{aligned}$$

Зауважимо, що для довільного $t \in (0, T]$ існує єдине число $t_1 \in (0, t)$ таке, що: $\Delta(t_1, 0) = B(t, t_1)$, при $\tau < t_1$ $\Delta(\tau, 0) < B(t, \tau)$ і при $\tau > t_1$ $\Delta(\tau, 0) > B(t, \tau)$. Справді, функція $\Delta(\cdot, 0)$ монотонно зростає, а $B(t, \cdot)$ монотонно спадає, причому $\Delta(0, 0) = B(t, t) = 0$. Відзначимо ще, що виконуються нерівності

$$\Delta(t, 0)/2 \leq \Delta(t_1, 0) \leq \Delta(t, 0) \leq \Delta(T, 0), \quad t \in (0, T]. \quad (16)$$

Дві останні нерівності очевидні, а перша випливає з нерівності

$$\begin{aligned} \Delta(t_1, 0) &= B(t, t_1) \geq \Delta(t, t_1) = \\ &= \Delta(t, 0) - \Delta(t_1, 0), \end{aligned}$$

яка правильна внаслідок (8).

Оцінимо інтеграл $I_\nu^r(0, t, t)$ при $r > \nu - 1$. Запишемо його у вигляді суми інтегралів $I_\nu^r(0, t_1, t)$ і $I_\nu^r(t_1, t, t)$. За допомогою (8) і (16) маємо

$$\begin{aligned} I_\nu^r(0, t_1, t) &\leq \int_0^{t_1} (\Delta(\tau, 0))^{r-\nu} d\Delta(\tau, 0) = \\ &= \frac{(\Delta(t_1, 0))^{r-\nu+1}}{r-\nu+1} \leq \frac{(\Delta(t, 0))^{r-\nu+1}}{r-\nu+1}; \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_\nu^r(t_1, t, t) &\leq \\
&\leq - \int_{t_1}^t (B(t, \tau))^{-\nu} dB(t, \tau) (\Delta(t, 0))^r = \\
&= \frac{(B(t, t_1))^{1-\nu}}{1-\nu} (\Delta(t, 0))^r \leq \frac{(\Delta(t, 0))^{r-\nu+1}}{1-\nu},
\end{aligned} \quad (18)$$

якщо $r \geq 0$ і $\nu < 1$;

$$\begin{aligned}
I_\nu^r(t_1, t, t) &\leq - \int_{t_1}^t (B(t, \tau))^{-\nu+r} dB(t, \tau) = \\
&= \frac{(B(t, t_1))^{r-\nu+1}}{r-\nu+1} \leq \frac{(\Delta(t, 0))^{r-\nu+1}}{r-\nu+1},
\end{aligned} \quad (19)$$

якщо $r < 0$. Отже,

$$I_\nu^r(0, t, t) \leq C(\Delta(t, 0))^{r-\nu+1}, \quad r > \nu-1, \nu < 1. \quad (20)$$

З (15) і (20) випливає оцінка

$$\|\partial_x^k u\|_{0, r+1-|k|/(2b)}^{0,0} \leq C \|f\|_{1, r}^{0,0}, \quad |k| < 2b. \quad (21)$$

Розглянемо випадок, коли $|k| = 2b$. За допомогою (2), (5), (9), (12)–(14), (17)–(19) і нерівності

$$|z|^l \exp\{-c|z|^q\} \leq C \exp\{-c_1|z|^q\}, \quad z \in \mathbf{R}^n, \quad (22)$$

де $l > 0$ і $c_0 < c_1 < c$, одержуємо

$$\begin{aligned}
&|\partial_x^k u(t, x)| \leq \\
&\leq C E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) (\|f\|_{1, r}^{0,0} I_1^r(0, t_1, t) + \\
&\quad + [f]_{1, r}^{\lambda, 0} I_{1-\lambda/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1, t, t) + \\
&\quad + \|f\|_{1, r}^{0,0} I_{1-\gamma/(2b)}^r(t_1, t, t)) \leq \\
&\leq C \|f\|_{1, r}^{\lambda, 0} E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) (\Delta(t, 0))^r, \\
&\quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]},
\end{aligned}$$

звідки випливає оцінка

$$\|\partial_x^k u\|_{0, r}^{0,0} \leq C \|f\|_{1, r}^{\lambda, 0}, \quad |k| = 2b. \quad (23)$$

Нехай (t, x) , (t', x') — довільно фіксовані точки шару $\Pi_{(0, T]}$, причому $t \leq t'$, і нехай $p \equiv p(t, x; t', x')$. Оцінимо різницю $\Delta u_k \equiv \Delta_{t, x}^{t', x'} \partial_x^k u(t, x)$, $0 < |k| \leq 2b$.

Коли $p^{2b} \geq \Delta(t, 0)$, то з допомогою оцінок (21) і (23) одержуємо

$$\begin{aligned}
|\Delta u_k| &\leq |\partial_x^k(t, x)| + |\partial_x^k u(t', x')| \leq \\
&\leq C \|f\|_{1, r}^{\lambda, 0} ((\Delta(t, 0))^{r+1-|k|/(2b)} \times \\
&\quad \times E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) + \\
&\quad + ((\Delta(t', 0))^{r+1-|k|/(2b)} E^{-d}(T, t') \Psi(t', x'))) \leq \\
&\leq C \|f\|_{1, r}^{\lambda, 0} p^\zeta (\Delta(t', 0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)} \times \\
&\quad \times E^{-d}(T, \tilde{t}) (\Psi(t, x) + \Psi(t', x')),
\end{aligned} \quad (24)$$

де $|k| \leq 2b$, $\tilde{t} \equiv t + (t' - t)\eta(d)$, $\zeta = \gamma$ для $|k| < 2b$ і $\zeta = \lambda$ для $|k| = 2b$.

Справді, оскільки на підставі монотонності δ і нерівності $A(t', t) \leq p^{2b}$

$$\begin{aligned}
\Delta(t', 0) &= \Delta(t, 0) + \Delta(t', t) \leq \\
&\leq p^{2b} + \delta(T) A(t', t) \leq (1 + \delta(T)) p^{2b},
\end{aligned}$$

то маємо

$$\begin{aligned}
&(\Delta(t, 0))^{r+1-|k|/(2b)} \leq \\
&\leq (\Delta(t, 0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)} p^\zeta \leq \\
&\leq (\Delta(t', 0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)} p^\zeta, \\
&(\Delta(t', 0))^{r+1-|k|/(2b)} = \\
&= (\Delta(t', 0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)} (\Delta(t', 0))^{\zeta/(2b)} \leq \\
&\leq C (\Delta(t', 0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)} p^\zeta.
\end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли $p^{2b} < \Delta(t, 0)$. Нехай точки t_1 і t_2 такі, що $B(t, t_1) = \Delta(t_1, 0)$ і $B(t, t_2) = p^{2b}$. Якщо $t_1 < t_2$, то на підставі (11) і (12) запишемо

$$\begin{aligned}
\Delta u_k &= \\
&= \int_0^{t_1} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbf{R}^n} \Delta_{t, x}^{t', x'} \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbf{R}^n} \Delta_{t, x}^{t', x'} \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^x f(\tau, \xi) d\xi + \\
&+ \int_{t_2}^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^x f(\tau, \xi) d\xi -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_2}^{t'} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbf{R}^n} \partial_{x'}^k Z(t, x'; \tau, \xi) \Delta_{\xi}^{x'} f(\tau, \xi) d\xi + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\Delta_{t,x}^{t',x'} \partial_x^k \int_{\mathbf{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) d\xi \right) f(\tau, x) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\partial_{x'}^k \int_{\mathbf{R}^n} Z(t', x'; \tau, \xi) d\xi \right) \Delta_{x'}^{x'} f(\tau, x) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} + \\
& + \int_{t_2}^t \left(\partial_x^k \int_{\mathbf{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) d\xi \right) f(\tau, x) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} - \\
& - \int_{t_2}^{t'} \left(\partial_{x'}^k \int_{\mathbf{R}^n} Z(t', x'; \tau, \xi) d\xi \right) f(\tau, x') \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \equiv \\
& \equiv \sum_{j=1}^8 J_j, \tag{25}
\end{aligned}$$

де $0 < |k| \leq 2b$.

Використовуючи (4), (9), (13), (14) і (17), одержуємо

$$\begin{aligned}
|J_1| & \leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} p^\gamma E^{-d}(T, \tilde{t}) \times \\
& \times (\Psi(t, x) + \Psi(t', x')) I_{(|k|+\gamma)/(2b)}^r(0, t_1, t) \leq \\
& \leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} p^\zeta E^{-d}(T, \tilde{t}) (\Psi(t, x) + \\
& + \Psi(t', x')) (\Delta(t, 0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)},
\end{aligned}$$

де число ζ таке ж, як у (24).

Оцінимо J_2 . За допомогою (4), (9), (13), (14), (17) і (22) маємо

$$\begin{aligned}
|J_2| & \leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} p^\gamma E^{-d}(T, \tilde{t}) (\Psi(t, x) + \Psi(t', x')) \times \\
& \times \int_{t_1}^{t_2} (B(t, \tau))^{-\gamma/(2b)} \times \\
& \times (\Delta(\tau, 0))^{r-\lambda/(2b)} ((B(t, \tau))^{-(|k|-\lambda)/(2b)} + \\
& + p^\lambda (B(t, \tau))^{-|k|/(2b)}) \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \leq \\
& \leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} p^\gamma E^{-d}(T, \tilde{t}) \times \\
& \times (\Psi(t, x) + \Psi(t', x')) (I_{(|k|+\gamma-\lambda)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1, t_2, t) +
\end{aligned}$$

$$+ p^\lambda I_{(|k|+\gamma)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1, t_2, t)). \tag{26}$$

Оскільки $p^\lambda = (B(t, t_2))^{\lambda/(2b)} \leq (B(t, \tau))^{\lambda/(2b)}$, $\tau \leq t_2$, то

$$p^\lambda I_{(|k|+\gamma)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1, t_2, t) \leq I_{(|k|+\gamma-\lambda)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1, t_2, t). \tag{27}$$

З використанням (8), (16) і того, що $\lambda < \gamma$, одержуємо

$$I_{(|k|+\gamma-\lambda)/(2b)}^{r-\lambda/(2b)}(t_1, t_2, t) \leq (\Delta(t_2, 0))^{r-\lambda/(2b)} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t_2} (B(t, \tau))^{-(|k|+\gamma-\lambda)/(2b)} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \leq$$

$$\leq \begin{cases} C(\Delta(t, 0))^{r+1-(|k|+\gamma)/(2b)}, & |k| < 2b, \\ C(\Delta(t, 0))^{r+1-(|k|+\lambda)/(2b)} p^{\lambda-\gamma}, & |k| = 2b. \end{cases} \tag{28}$$

З (26)–(28) випливає оцінка

$$|J_2| \leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} E^{-d}(T, \tilde{t}) (\Psi(t, x) + \Psi(t', x')) P_{\zeta|k|},$$

де $P_{\zeta|k|} \equiv p^\zeta (\Delta(t, 0))^{r+1-(|k|+\zeta)/(2b)}$.

Скориставшись (2), (8), (14) і (22), одержимо

$$\begin{aligned}
|J_3| & \leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) (\Delta(t, 0))^{r-\lambda/(2b)} \times \\
& \times \int_{t_2}^t (B(t, \tau))^{-(|k|-\lambda)/(2b)} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{t_2}^t (B(t, \tau))^{-(|k|-\lambda)/(2b)} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{p^{2b-|k|+\lambda}}{1 - (|k| - \lambda)/(2b)},$$

то маємо

$$\begin{aligned}
|J_3| & \leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} E^{-d}(T, t) \times \\
& \times \Psi(t, x) (\Delta(t, 0))^{r-\lambda/(2b)} p^{2b-|k|+\lambda} \leq \\
& \leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) P_{\zeta|k|}.
\end{aligned}$$

Аналогічно одержується оцінка

$$|J_4| \leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} E^{-d}(T, t') \Psi(t', x') P_{\zeta|k|}.$$

За допомогою (6), (8) і (16) маємо

$$\begin{aligned}
|J_5| &\leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} p^\gamma E^{-d}(T, \tilde{t}) \Psi(t, x) \times \\
&\times \int_{t_1}^{t_2} (B(t, \tau))^{-|k|/(2b)} (\Delta(\tau, 0))^r \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \leq \\
&\leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} (\Delta(t, 0))^r E^{-d}(T, \tilde{t}) \times \\
&\times \Psi(t, x) \int_{t_1}^{t_2} (B(t, \tau))^{-(|k|-\gamma)/(2b)} \times \\
&\times \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} (\Delta(t, 0))^r E^{-d}(T, \tilde{t}) \times \\
&\times \Psi(t, x) (B(t, t_2))^{1-(|k|-\gamma)/(2b)} \leq \\
&\leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} E^{-d}(T, \tilde{t}) \Psi(t, x) P_{\zeta|k|},
\end{aligned}$$

а на підставі (5) аналогічно одержуємо

$$\begin{aligned}
|J_6| &\leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} E^{-d}(T, \tilde{t}) \times \\
&\times (\Psi(t, x) + \Psi(t', x')) p^\lambda \times \\
&\times \int_{t_1}^{t_2} (B(t, \tau))^{-(|k|-\gamma)/(2b)} \times \\
&\times (\Delta(\tau, 0))^{r-\lambda/(2b)} \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \leq \\
&\leq C [f]_{1,r}^{\lambda,0} E^{-d}(T, \tilde{t}) (\Psi(t, x) + \Psi(t', x')) P_{\zeta|k|}.
\end{aligned}$$

Інтеграл J_7 оцінюється так:

$$\begin{aligned}
|J_7| &\leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) \times \\
&\times \int_{t_2}^t (B(t, \tau))^{-(|k|-\lambda)/(2b)} (\Delta(\tau, 0))^r \frac{\delta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \leq \\
&\leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) (\Delta(t, 0))^r \times \\
&\times p^{2b-|k|+\lambda} \leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) P_{\zeta|k|}.
\end{aligned}$$

Аналогічно одержується оцінка

$$|J_8| \leq C \|f\|_{1,r}^{0,0} E^{-d}(T, t') \Psi(t', x') P_{\zeta|k|}.$$

Для випадку, коли $t_1 \geq t_2$, замість (25) використовується зображення $\Delta u_k = J_1 + J'_3 + J'_4 + J'_7 + J'_8$, де J_1 таке ж, як у (25), а J'_j відрізняється від J_j , $j \in \{3, 4, 7, 8\}$, тим, що

в ньому t_2 замінено на t_1 . Оцінки J'_j одержуються аналогічно оцінкам J_j .

З (21), (23), (24) та оцінок J_j , $j \in \{1, \dots, 8\}$, J'_j , $j \in \{3, 4, 7, 8\}$, випливає оцінка (10).

Отже, функція (7) є розв'язком системи (1) з простору $U_r^{\gamma,\lambda}$. Для неї, зокрема, правильна оцінка

$$|u(t, x)| \leq C E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) (\Delta(t, 0))^{r+1}, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]} \quad (29)$$

Доведемо єдиність розв'язку системи (1) у просторі $U_r^{\gamma,\lambda}$. Для цього досить довести, що розв'язок $u \in U_r^{\gamma,\lambda}$ однорідної системи (1) є нульовим. Нехай (t, x) — довільно взята точка з $\Pi_{(0,T]}$ і $t_0 \in (0, t)$. Функція u в $\Pi_{(t_0,T]}$ є розв'язком задачі Коші для однорідної системи з початковою функцією $u(t_0, \cdot)$. На підставі результатів з [4] для параболічної системи без вироджень правильна формула

$$u(t, x) = \int_{\mathbf{R}^n} Z(t, x; t_0, \xi) u(t_0, \xi) d\xi, \quad (30)$$

За допомогою (2), (9), (14), (29) і (30) одержуємо

$$|u(t, x)| \leq C E^{-d}(T, t) \Psi(t, x) (\Delta(t_0, 0))^{r+1},$$

звідки при $t_0 \rightarrow 0$ випливає, що $u(t, x) = 0$. Оскільки точка (t, x) довільна з $\Pi_{(0,T]}$, то маємо $u = 0$ в $\Pi_{(0,T]}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України.— 1994.— №6.— С.7—11.
2. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Фундаментальні матриці розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині.— Чернівець. ун-т.— Чернівці, 1995.— 51с.— Деп. в ДНТБ України 12.07.95, N1808-Ук95.
3. Медінський І. П. Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". N364. Прикладна математика.— Львів: Вид-во Держ. ун-ту "Львівська політехніка", 1999.— С.298—307.
4. Эйдельман С.Д. Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.