

DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2025.02.05>

НІКОРАК О.О., РАТУШНЯК С.П.

НЕПЕРЕРВНИЙ ПРОЄКТОР ДВІЙКОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ В ЛАНЦЮГОВЕ A_2 -ЗОБРАЖЕННЯ

У роботі вводиться в розгляд і вивчається одна неперервна функція, що є проєктором цифр класичного двійкового зображення чисел в цифри ланцюгового A_2 -зображення з нульовою надлишковістю, а саме функція виду:

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}\right) = 1/2^{\alpha_1-1} + 1/2^{-\alpha_2} + 1/2^{\alpha_3-1} + 1/2^{-\alpha_4} + \dots + 1/2^{\alpha_{2k-1}-1} + 1/2^{-\alpha_{2k}} + \dots, \alpha_n \in \{0; 1\}.$$

В роботі обґрунтовується коректність означення функції f , яка могла бути порушена через існування чисел, що мають два формально різні двійкові зображення, доводиться її неперервність та монотонність. Використовуючи нормальні властивості чисел за їх двійковим зображенням (властивості, якими володіють зображення чисел множини повної міри Лебега) і теорему Лебега, яка констатує існування майже скрізь скінченної похідної у неперервної монотонної функції, доводиться сингулярність функції f . Під сингулярною функцією розуміється неперервна функція, відмінна від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега.

У статті висвітлюється взаємозв'язок розглядуваної функції, оператора правостороннього зсуву цифр та інверсора цифр ланцюгового зображення чисел. На основі даного взаємозв'язку обґрунтовується сингулярність інверсора цифр ланцюгового зображення чисел.

Ключові слова і фрази: ланцюговий дріб, A_2 -зображення чисел, проєктор цифр, інверсор цифр, сингулярна функція, нормальна властивість чисел за його зображенням, суперпозиція сингулярних функцій.

^{1,2}Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, ²Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

e-mail: nikorak@imath.kiev.ua, ratush404@gmail.com

ВСТУП

Функції зі складними локальними властивостями часто виникають як відображення, породжені перетворювачами цифр одного зображення чисел в інше. Ці зображення можуть збігатися, можуть бути узгоджені (геометрією, алфавітами). Окрему увагу заслуговує клас неперервних функцій, для яких системи зображення узгоджені потужностями алфавітів, але

УДК 511.7+517.5

2010 *Mathematics Subject Classification*: 26A30.

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, R.S.)

не обов'язково геометрією зображення. Серед цікавих прикладів таких функцій зі складних диференціальними властивостями, означених в термінах ланцюгових зображень чисел можна навести такі: сингулярна функція Мінковського [8], сингулярна функція типу Сєндова [2], неперервні ніде не монотонні функції типу Трибін-функцій [13, 12] тощо. Вивчення їх диференціальних властивостей в кожному з випадків вимагає свої індивідуальні підходи. Загальних методів доведення сингулярності функції, хоча б одна зі змінних якої записана ланцюговим зображенням чисел, на сьогодні нам невідомі.

В роботі досліджується одна неперервна функція, значення якої записане нескінченним ланцюговим A_2 -зображенням чисел і доводимо її сингулярність, черпаючи ідеї доведення реалізовані в роботі [2].

1 ЛАНЦЮГОВЕ A_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Ланцюговим дробом називається вираз виду

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \equiv a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 \dots \equiv [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

де $a_i \in R$, $i \in \mathbb{N}$, $a_0 \in \mathbb{N}_0$. Збіжність нескінченного ланцюгового дроби забезпечує теорема Зейделя [9]. Відомо, що будь-яке дійсне число $x \in \mathbb{R}$ можна подати у вигляді елементарного ланцюгового дроби, тобто такого, для якого $a_n \in \mathbb{N}$.

Значення скінченного ланцюгового дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ є раціональним числом, тобто $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, причому дріб $\frac{p_n}{q_n}$ нескоротний. Дріб виду $\frac{p_n}{q_n}$ називають *підхідним дробом* ланцюгового дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$

Для підхідних дробів мають місце наступні рекурентні співвідношення:

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{де} \quad \begin{cases} p_0 = a_0, \\ q_0 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} p_{-1} = 1, \\ q_{-1} = 0. \end{cases}$$

Справедливими є наступні властивості підхідних дробів [3]: для будь-якого $k \in \mathbb{N}$

- 1) $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$;
- 2) $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1]$;
- 3) $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}$, де $r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$.

Для нескінченного ланцюгового дроби $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ і відповідних підхідних дробів $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ має місце рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots].$$

Розглянемо одне кодування дійсних чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ нескінченними ланцюговими дробами, а саме A_2 -дробами. Нехай $A_2 \equiv \{\frac{1}{2}, 1\}$ – алфавіт, $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту A_2 .

Ланцюговим A_2 -дробом (коротко A_2 -дробом) називається ланцюговий дріб виду

$$0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots, \quad \text{де } a_n \in A_2.$$

Теорема 1. [1] Для довільного числа $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_2$ така, що

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}. \quad (1)$$

Розклад числа x в ланцюговий дріб $[0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ називається ланцюговим A_2 -представленням, а запис виду $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$ – його ланцюговим A_2 -зображенням.

Означення 1. [1] Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}$ чисел виду $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots}^{A_2}$, тобто

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2} = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}, a_n \in A_2 \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}$ є відрізком з кінцями:

$$[0; c_1, \dots, c_m, (e_1, e_0)] \text{ і } [0; c_1, \dots, c_m, (e_0, e_1)],$$

причому де лівий, а де правий залежить від парності і непарності m .

Діаметр (довжина) циліндра $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}$ виражається формулою [1, 10]:

$$|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2}| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)} = \frac{(2c^2 + 1 + 2c^{\frac{q_{m-1}}{q_m}})}{(1 + c^{\frac{q_{m-1}}{q_m}})} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c}^{A_2}|. \quad (2)$$

З тополого-метричною і ймовірнісною теоріями ланцюгового A_2 -зображення чисел можна ознайомитися в роботах [4, 5, 6].

2 ОСНОВНИЙ ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для означення об'єкту дослідження нагадаємо, що під класичним двійковим зображенням чисел ми розуміємо запис виду $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2$, $\alpha_n \in \{0; 1\} \equiv A$ і його зміст

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2, \quad \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2 = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2^i}; \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right].$$

Розглядається функція f , означена рівністю

$$f(x) = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} \dots}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} (\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]} (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}} \dots}^{A_2}. \quad (3)$$

Означення функції рівністю (3) є коректним, незважаючи на те, що двійково-раціональні числа (тобто числа виду $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 0(1)}^2 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1(0)}^2$) мають два формально різні зображення. Справді,

$$f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2n}(0)}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}} (\frac{1}{2})^1}^{A_2} = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}-1} (\frac{1}{2})^1}^{A_2} = f(\Delta_{\alpha_1 \dots [\alpha_{2n}-1](1)}^2),$$

$$f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{2n-1}(0)}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} \dots (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]} (\frac{1}{2})^1}^{A_2} = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} \dots (\frac{1}{2})^{2-\alpha_{2n-1}} (\frac{1}{2})^1}^{A_2} = f(\Delta_{\alpha_1 \dots [\alpha_{2n-1}-1](1)}^2).$$

Теорема 2. Функція $f(x)$ є неперервною строго спадною функцією, причому $f(0) = 1$ і $f(1) = \frac{1}{2}$.

Доведення. Обґрунтуємо окремо неперервність функції f по множині двійково-раціональних та двійково-ірраціональних чисел. Нехай $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2$ – двійково-ірраціональна точка відрізка $[0; 1]$. Функція f є неперервною в точці x_0 , якщо для довільної послідовності двійково-ірраціональних чисел має місце рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$. З того, що $x \neq x_0$ слідує, що існує такий номер m , що $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$ і $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$, $i < m$. Тоді умова $x \rightarrow x_0$ рівносильна тому, що $m \rightarrow \infty$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\alpha_m(x_0) = \alpha_m$, тоді $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} [1-\alpha_m] \alpha'_{m+1} \alpha'_{m+2} \dots}^2$. Нехай

$$f(x_0) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m}^{A_2} = \frac{r_{m+1} p_m + p_{m-1}}{r_{m+1} q_m + q_{m-1}}, \quad r_{m+1} = [b_{m+1}; b_{m+2}, b_{m+3} \dots]$$

$$f(x) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_{m-1} b'_m}^{A_2} = \frac{r'_{m+1} p_m + p_{m-1}}{r'_{m+1} q_m + q_{m-1}}, \quad r'_{m+1} = [b'_{m+1}; b'_{m+2}, b'_{m+3} \dots].$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{r_{m+1} p_m + p_{m-1}}{r_{m+1} q_m + q_{m-1}} - \frac{r'_{m+1} p_m + p_{m-1}}{r'_{m+1} q_m + q_{m-1}} \right| = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|r_{m+1} - r'_{m+1}|}{(r_{m+1} q_m + q_{m-1})(r'_{m+1} q_m + q_{m-1})} = 0. \end{aligned}$$

В силу довільності вибору x_0 , функція f є неперервною по множині двійково-ірраціональних чисел. Неперервність функції f по множині двійково-раціональних чисел є прямим наслідком коректності означення функцій в двійково-раціональній точці.

Розглянемо два довільні числа $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^2$ і $x_2 = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^2$, такі що $x_1 < x_2$, тобто існує таке натуральне число n , що має місце одна з умов:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \beta_i, i = 1, 2, \dots, 2n, \text{ але } 0 = \alpha_{2n+1} < \beta_{2n+1} = 1, \\ \alpha_i &= \beta_i, i = 1, 2, \dots, 2n-1, \text{ але } 1 = \alpha_{2n} > \beta_{2n} = 0, \end{aligned}$$

тоді для відповідних значень функції мають місце нерівності (згідно з правилами порівняння чисел за їх ланцюговим зображенням [1]):

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} (\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}} \frac{1}{2}}^{A_2} > \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} (\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}} 1}^{A_2} = f(x_2), \\ f(x_1) &= \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} (\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n-1}} 1}^{A_2} > \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]} (\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n-1}} \frac{1}{2}}^{A_2} = f(x_2). \end{aligned}$$

Отже, з умови $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) > f(x_2)$, а значить функція є строго спадною, причому $f(0) = f(\Delta_{(0)}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2} 1)}^{A_2} = 1$, $f(1) = f(\Delta_{(1)}^2) = \Delta_{(1 \frac{1}{2})}^{A_2} = \frac{1}{2}$. $\square$

Теорема 3. Функція f є сингулярною.

Доведення. Оскільки функція f неперервна і монотонна, то згідно з теоремою Лебега, вона має скінченну похідну у майже всіх точках області визначення. Позначимо множину таких точок через D . Розглянемо число $x_0 \in D$, таке, що є нормальним числом [2] (тобто використовує довільний набір нулів та одиниць нескінченну кількість раз у своєму двійковому зображенні, як відомо, множина H таких чисел є множиною повної міри Лебега). Тоді $x_0 \in W = D \cap H$. Таким чином $\lambda(W) = 1$, як міра перерізу двох множин повної міри Лебега.

Нехай $f(x_0) = f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2) = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{A_2}$. Використовуючи означення циліндричної похідної [10], маємо

$$\begin{aligned} -f'(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2)|}{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}|}{|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^2|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}|}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2|\Delta_{a_1 \dots a_k}^{A_2}|}{|\Delta_{a_1 \dots a_{k-1}}^{A_2}|} = \\ &= \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2|\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}|}{|\Delta_{a_1 \dots a_{n-1}}^{A_2}|} = \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 + a \frac{q_{n-1}}{q_n})}{2a^2 + 1 + 2a \frac{q_{n-1}}{q_n}} = \\ &= \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{a} + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2 \frac{q_{n-1}}{q_n}}, \quad a \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки останній вираз під добутком не прямує до 1, коли $n \rightarrow \infty$, а тому необхідна умова збіжності нескінченного добутку не виконується, то з того, що $x_0 \in W$, маємо $f'(x_0) = 0$ майже скрізь у розумінні міри Лебега. А отже, функція f сингулярна. $\square$

Лема 1. Графік Γ_f функції є автомодельною множиною (тобто такою, що можна подати у вигляді об'єднання підмножин, які еквівалентні усій множині відносно деякої групи перетворень площини) $\Gamma_f = \bigcup_{(i,j) \in A \times A} g_{ij}(\Gamma_f)$, де

$$g_{ij} : \begin{cases} x' = \frac{x}{2^2} + \frac{2i+j}{2^2}, \\ y' = \frac{1}{2^{i-1} + \frac{1}{2^{-j+y}}}, \end{cases} \quad (i, j) \in A \times A, \quad g_{ij}(M(x; y)) = M'(x'; y').$$

Доведення. Розглянемо довільну точку $M(x'; y') \in \Gamma_f$, тоді $M(x'; y') \in \Delta_{ij}^2 \times \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-i]}(\frac{1}{2})^j}^{A_2}$, де $(i, j) \in A \times A$. Згідно з означенням функції

$$x' = \Delta_{ij\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}^2, \quad y = f(x) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-i]}(\frac{1}{2})^j(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]}(\frac{1}{2})^{\alpha_2}\dots(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]}(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}}^{A_2}.$$

Тоді для $x' \in \Delta_{ij}^2$ очевидно є рівність

$$x' = \Delta_{ij\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}^2 = \frac{i}{2} + \frac{j}{2^2} + \frac{1}{2^2}x,$$

де $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}^2 \in [0; 1]$, $\alpha_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$;

$$y' = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-i]}(\frac{1}{2})^j(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]}(\frac{1}{2})^{\alpha_2}\dots(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]}(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}}^{A_2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^{[1-i]} + \frac{1}{(\frac{1}{2})^{j+y}}},$$

де $y = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]}(\frac{1}{2})^{\alpha_2}\dots(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n-1}]}(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}}}^{A_2} \in [\frac{1}{2}; 1]$, $\alpha_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$. Отже, довільна точка графіка є образом деякої точки графіка під дією перетворення g_{ij} . Таким чином, графік функції f є автомодельною множиною. $\square$

3 ПРИКІНЦЕВІ ЗАУВАЖЕННЯ

Теорема 4. Функція, означена рівністю

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{\alpha_1}(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_2]}\dots(\frac{1}{2})^{\alpha_{2n-1}}(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n}]}}^{A_2}, \quad (4)$$

є неперервною строго зростаючою сингулярною функцією.

Доведення. Дане твердження є очевидним в силу взаємозв'язку функції $\bar{f}$ з функцією f :

$$\bar{f}(x) = \omega(f(x)),$$

де $\omega(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}) = \Delta_{a_2 \dots a_n \dots}^{A_2} = \frac{1}{x} - a_1(x)$ – оператор зсуву цифр ланцюгового зображення чисел [7]. $\square$

Зауваження 1. Функція, обернена до функції $\bar{f}$, є неперервною сингулярною функцією.

Зауваження 2. Для інверсора цифр ланцюгового зображення має місце рівність:

$$I(\Delta_{(\frac{1}{2})^{\alpha_1}(\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{\alpha_n} \dots}^{A_2}) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]}(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_2]} \dots (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_n]} \dots}^{A_2} = f(\bar{f}^{-1}(x)).$$

Таким чином, інверсор I цифр ланцюгового A_2 -зображення чисел є композицією двох сингулярних функцій (що не є взаємно оберненими функціями) [11], **а тому інверсор є сингулярною функцією.**

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V. *A₂-continued fraction representation of real numbers and its geometry* // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Y.V., Lysenko I.M., Ratushniak S. P. *Continued A₂-fractions and singular functions*. Matematychni Studii, 2022, 58(1), doi: 10.30970/ms.58.1.3-12.
- [3] Pratsiovytyi M., Goncharenko Ya., Lysenko I., Ratushniak S. *Finite A₂-continued fractions in the problems of rational approximations of real numbers* Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, vol. 75, no. 6, June 2023, pp. 849-858.
- [4] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. *Properties of the distribution of the random variable defined by A₂-continued fraction with independent elements* // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.
- [5] Pratsiovytyi M.V., Kyurchev D.V. *Singularity of the distribution of a random variable represented by an A₂-continued fraction with independent elements*. Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2010. Vol. 81. C. 159 — 175.
- [6] Pratsiovytyi M., Makarchuk O. *On some metric results for representation numbers by continued A₂-fractions*, 2025. Bukovinian Mathematical Journal, V.13, No.1., 100-108, doi:10.31861/bmj2025.01.09.
- [7] Pratsiovytyi M., Chuikov A. *Continuous distributions whose functions preserve tails of an A₂-continued fraction representation of numbers* // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.
- [8] Salem R. *On some singular monotonic functions with are stricly increasing*. Trans. Amer. Math. Soc. 1943, **53**, 423–439.
- [9] Seidel L. *Untersuchungen über die Konvergenz and Divergenz der Kettenbrüche*. — München: Habilschrift, 1846.
- [10] Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування чисел та їх застосування. К.: Наукова думка, 2022.— 316 с.
- [11] Працьовитий М.В., Косопльоткіна О.В. *Фрактальні властивості суперпозиції сингулярних функцій розподілу*. Теорія ймовірностей та математична статистика. 2002. Вип. 67. С. 122–129.

- [12] Працьовитий М.В., Чуйков А.С. *Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трійкових і ланцюгових A_2 -дробів*. Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2018, Т.15, № 1. С. 147-161.
- [13] Ратушняк С.П. *Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового A -зображення чисел*. Буковинський математичний журнал. 2023; 11(2). <https://doi.org/https://doi.org/10.31861/bmj2023.02.23>

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V. *A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry* // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Y.V., Lysenko I.M., Ratushniak S. P. *Continued A_2 -fractions and singular functions*. Matematychni Studii, 2022, 58(1), doi: 10.30970/ms.58.1.3-12.
- [3] Pratsiovytyi M., Goncharenko Ya., Lysenko I., Ratushniak S. *Finite A_2 -continued fractions in the problems of rational approximations of real numbers* Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, vol. 75, no. 6, June 2023, pp. 849-858.
- [4] Pratsiovytyi M., Kyurchev D. *Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements* // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.
- [5] Pratsiovytyi M.V., Kyurchev D.V. *Singularity of the distribution of a random variable represented by an A_2 -continued fraction with independent elements*. Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2010. Vol. 81. С. 159 — 175.
- [6] Pratsiovytyi M., Makarchuk O. *On some metric results for representation numbers by continued A_2 -fractions*, 2025. Bukovinian Mathematical Journal, V.13, No.1., 100-108,doi10.31861/bmj2025.01.09.
- [7] Pratsiovytyi M., Chuikov A. *Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2 -continued fraction representation of numbers* // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.
- [8] Salem R. *On some singular monotonic functions with are stricly increasing*. Trans. Amer. Math. Soc. 1943, **53**, 423-439.
- [9] Seidel L. *Untersuchungen über die Konvergenz and Divergenz der Kettenbrüche*. — München: Habilschrift, 1846.
- [10] Pratsiovytyi M.V. Two-symbol systems of encoding of real numbers and their applications). Naukova Dumka, Kyiv (2022). (in Ukrainian)
- [11] M.V. Pratsiovytyi, O.V. Kosoplotkina *Fractal properties of superposition of singular distribution functions*. Theor. Probability and Math. Statist., No. 67, 2002, pp. 122-129. (in Ukrainian)
- [12] Pratsiovytyi M.V., Chuikov A.S. *A continuous nowhere monotonic function defined in terms of negaternary and continued A_2 - fractions*. Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine , 2018, T.15, № 1. pp. 147-161. (in Ukrainian)
- [13] Ratushniak S.P. *Continuous nowhere monotonic function defined by terms continued A -representations of numbers* Bukovinian Mathematical Journal. 2023; 11(2). <https://doi.org/https://doi.org/10.31861/bmj2023.02.23> (in Ukrainian)

Надійшло 10.11.2025

Nikorak O.O., Ratushniak S.P. *A Continuous projector from the binary representation of numbers to the continuous A_2 -representation*, Bukovinian Math. Journal. **13**, 2 (2025), 39–46.

In this paper, we introduce and study a continuous function that projects the digits of the classical binary representation of an arbitrary real number onto the digits of the continued A_2 -representation with zero redundancy. The function is defined by

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}\right) = 1/2^{\alpha_1-1} + 1/2^{-\alpha_2} + 1/2^{\alpha_3-1} + 1/2^{-\alpha_4} + \dots + 1/2^{\alpha_{2k-1}-1} + 1/2^{-\alpha_{2k}} + \dots,$$

where $\alpha_n \in \{0; 1\}$. We justify the correctness of this definition, which is nontrivial because some numbers possess two distinct binary expansions. Using the fact that almost all real numbers have normal binary expansions, together with Lebesgue's theorem on the derivative of continuous monotone functions, we show that the function f is singular. Here, a singular function refers to a continuous, non-constant function whose derivative is equal to zero almost everywhere with respect to the Lebesgue measure.

In addition, we reveal the relationship between the function f , the right-shift digit operator, and invensor of digits of the A_2 -representation of numbers. Based on this relationship, we also demonstrate the singularity of the invensor of digits of the A_2 -representation.