

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

## ДІАМЕТР ГРАФА КЕЛІ ВІНЦЕВОГО ДОБУТКУ ДВОХ СИМЕТРИЧНИХ ГРУП ДЛЯ ДВОЕЛЕМЕНТНОЇ СИСТЕМИ ТВІРНИХ

Установлено, що вінцевий добуток двох симетричних груп завжди є 2-породженим. Одержано поліноміальну оцінку діаметра графа Келі групи  $S_m \wr S_n$ .

It is shown that the wreath product of two symmetric groups is 2-generated. The polynomial estimation of Cayley's graph diameter is obtained for group  $S_m \wr S_n$ .

Вінцеві добутки скінченних симетричних груп застосовуються в різних розділах дискретної математики: у теорії графів, при класифікації функцій багатозначної логіки тощо (див., зокрема, [1]). Низка тверджень про будову таких вінцевих добутків є в монографіях [2,3]. У працях [4,5] встановлено, що (за очевидними винятками) ці групи є максимальними підгрупами у відповідній симетричній групі, а в працях [6,7] вивчалися примітивні зображення таких вінцевих добутків (так звані симетричні експоненціювання). У [8] показано, що вони також можуть бути максимальними підгрупами у відповідних симетричних групах. Саме тому подальше дослідження будови таких вінцевих добутків є цікавою й перспективною задачею. Розвиваючи методикку, запропоновану в [9,10], у даній статті будуються конкретні 2-елементні системи твірних вінцевих добутків двох симетричних груп і оцінюється діаметр графа Келі для таких систем твірних.

### Допоміжні твердження

**Лема 1.** При довільному  $k > 2$  група  $S_k$  породжується підстановками

$$\alpha_1 = (1, 2), \quad \beta_1 = (1, 2, \dots, k)$$

або підстановками

$$\alpha_2 = (1, 2, \dots, k-1), \quad \beta_2 = (1, 2, \dots, k).$$

Доведення леми див. в [11].

Нехай  $\Sigma$  — деяка система твірних симетричної групи  $S_k$ . Символом  $l_\Sigma(\sigma)$  позначимо довжину мінімального розкладу підстановки  $\sigma$  на добуток твірних із  $\Sigma$  і покладемо

$$L_\Sigma(k) = \max_{\sigma \in S_k} l_\Sigma(\sigma).$$

**Лема 2.** 1) Якщо  $\Sigma = \{\alpha_1, \beta_1\}$ , то

$$L_\Sigma(k) \leq \frac{k(k-1)}{2}(k^2 + k - 1).$$

2) Якщо  $\Sigma = \{\alpha_2, \beta_2\}$ , то

$$L_\Sigma(k) \leq \frac{k(k-1)}{2}(k^2 + 2k - 2).$$

Доведення леми 2 див. у [10].

### Двоелементні системи твірних вінцевого добутку двох симетричних груп

**Теорема 1.** Група  $T_{m,n} = S_m \wr S_n$ , де  $m, n$  — натуральні числа ( $m, n > 2$ ), є 2-породженою, тобто містить незвідну систему твірних, яка складається з двох елементів.

**Доведення.** Оскільки за лемою 1 симетричні групи  $S_m$  і  $S_n$  ( $m, n > 2$ ) є 2-породженими, то в групі  $T_{m,n}$  стандартним чином можна визначити системи твірних, які складаються з чотирьох елементів:

$$\begin{aligned} a &= [(1, 2, \dots, m); \varepsilon, \dots, \varepsilon], \\ b &= [(1, 2); \varepsilon, \dots, \varepsilon], \\ c &= [\varepsilon; (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon], \end{aligned} \quad (1)$$

або

$$\begin{aligned} d &= [\varepsilon; (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon] \\ \tilde{a} &= [(1, 2, \dots, m-1); \varepsilon, \dots, \varepsilon], \\ \tilde{b} &= [(1, 2, \dots, m); \varepsilon, \dots, \varepsilon], \\ \tilde{c} &= [\varepsilon; (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon], \\ \tilde{d} &= [\varepsilon; (1, 2, \dots, n-1), \varepsilon, \dots, \varepsilon]. \end{aligned} \quad (2)$$

Покажемо, що кількість твірних можна зменшити до двох. Розглянемо 4 різні випадки залежно від парності чисел  $m$  і  $n$ .

*Випадок 1.* Нехай  $m, n$  — непарні натуральні числа. Покажемо, що елементи

$$\begin{aligned} u_1 &= [(1, 2, \dots, m); (1, 2), \dots, (1, 2)], \\ v_1 &= [(1, 2); (1, 2), \varepsilon, (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon] \end{aligned} \quad (3)$$

утворюють незвідну систему твірних групи  $T_{m,n}$ . Для цього досить довести, що таблиці  $a, b, c, d$  виражаються через  $u_1$  та  $v_1$ .

Для довільного цілого числа  $k$

$$u_1^k = [(1, 2, \dots, m)^k; (1, 2)^k, \dots, (1, 2)^k].$$

Оскільки  $m$  — непарне число, то

$$\begin{aligned} u_1^m &= [\varepsilon; (1, 2), \dots, (1, 2)], \\ u_1^{m+1} &= [(1, 2, \dots, m); \varepsilon, \dots, \varepsilon] = a. \end{aligned}$$

Аналогічно можна перевірити, що для кожного цілого числа  $s$

$$\begin{aligned} v_1^{2s} &= [(1, 2)^{2s}; (1, 2)^s, (1, 2)^s, \\ &\quad (1, 2, \dots, n)^{2s}, \varepsilon, \dots, \varepsilon] \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} v_1^{2s+1} &= [(1, 2)^{2s+1}; (1, 2)^{s+1}, (1, 2)^s, \\ &\quad (1, 2, \dots, n)^{2s+1}, \varepsilon, \dots, \varepsilon]. \end{aligned}$$

Оскільки  $n$  — непарне число, то

$$v_1^n = [(1, 2); (1, 2)^{\frac{n+1}{2}}, (1, 2)^{\frac{n-1}{2}}, \varepsilon, \dots, \varepsilon]$$

і

$$\begin{aligned} v_1^{n+1} &= \\ &= [\varepsilon; (1, 2)^{\frac{n+1}{2}}, (1, 2)^{\frac{n-1}{2}}, (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon]. \end{aligned}$$

Можливі два наступні випадки.

а)  $n = 4s + 1$  ( $s \in \mathbf{N}$ ), тобто  $\frac{n+1}{2} = 2s + 1$  — непарне,  $\frac{n-1}{2} = 2s$  — парне натуральні числа. Тоді

$$v_1^n = [(1, 2); (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon]$$

і

$$v_1^{n+1} = [\varepsilon; (1, 2), (1, 2), (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon].$$

Обчислимо такі добутки:

$$\begin{aligned} v_1^{2n} &= (v_1^n)^2 = [\varepsilon; (1, 2), (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon], \\ (v_1^{n+1})^{n+1} &= [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon]. \end{aligned}$$

б)  $n = 4s + 3$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ), тобто  $\frac{n+1}{2} = 2s + 2$  — парне,  $\frac{n-1}{2} = 2s + 1$  — непарне натуральні числа. Тоді одержимо, що

$$v_1^n = [(1, 2); \varepsilon, (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

$$v_1^{n+1} = [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

$$v_1^{2n} = (v_1^n)^2 = [\varepsilon; (1, 2), (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon].$$

Отже,

$$v_1^n = \begin{cases} [(1, 2); (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon], & n = 4s + 1, \\ [(1, 2); \varepsilon, (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon], & n = 4s + 3, \end{cases}$$

$$v_1^{n+1} = \begin{cases} [\varepsilon; (1, 2), (1, 2), (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon], & n = 4s + 1, \\ [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon], & n = 4s + 3. \end{cases}$$

Для зручності позначимо

$$z = [\varepsilon; (1, 2), (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon] = v_1^{2n},$$

$$\begin{aligned} r &= [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon] = \\ &= \begin{cases} (v_1^{n+1})^{n+1}, & n = 4s + 1, \\ v_1^{n+1}, & n = 4s + 3, \end{cases} \end{aligned}$$

Можна перевірити, що для довільного цілого  $i, 0 \leq i \leq \frac{m-3}{2}$ , отримуємо

$$a^{2i} \cdot z \cdot a^{-2i} =$$

$$= [\varepsilon; \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{2i}, (1, 2), (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

звідки

$$\prod_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} a^{2i} \cdot z \cdot a^{-2i} = [\varepsilon; \underbrace{(1, 2), \dots, (1, 2)}_{m-1}, \varepsilon].$$

Поклавши  $f = [\varepsilon; (1, 2), \dots, (1, 2), \varepsilon]$ , маємо

$$u_1 \cdot f \cdot a^{-1} = [\varepsilon; (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon] = c,$$

а тому

$$b = [(1, 2); \varepsilon, \dots, \varepsilon] = \begin{cases} c \cdot v_1^n, & n = 4s + 1, \\ v_1^n \cdot c, & n = 4s + 3. \end{cases}$$

Залишилося одержати вираз для  $d$ . Для довільного цілого  $0 \leq i \leq m - 3$  маємо

$$a^i \cdot r \cdot a^{-i} = [\varepsilon; \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{i+2}, (1, 2, \dots, n), \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{m-i-3}],$$

а тому

$$a^{m-2} \cdot r \cdot a^{-(m-2)} = a \cdot (a^{m-3} \cdot r \cdot a^{-(m-3)}) \cdot a^{-1} = [\varepsilon; (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon] = d.$$

Таким чином, для непарних  $m, n$  справджуються рівності

$$a = u_1^{m+1}; \quad c = u_1 \cdot f \cdot a^{-1}; \quad d = a^{m-2} \cdot r \cdot a^{-(m-2)};$$

$$b = \begin{cases} c \cdot v_1^n, & n = 4s + 1, \\ v_1^n \cdot c, & n = 4s + 3, s \in \mathbf{N}, \end{cases} \quad (4)$$

де  $f, r$  визначено вище. Отже,  $u_1, v_1$  утворюють систему твірних вінцевого добутку  $S_m \wr S_n$  при непарних  $m$  і  $n$ .

**Випадок 2.** Нехай  $m$  — непарне,  $n$  — парне натуральні числа. Покажемо, що елементи

$$u_2 = [(1, 2, \dots, m); (1, 2), \dots, (1, 2)],$$

$$v_2 = [(1, 2); (1, 2, \dots, n), \varepsilon, (1, 2, \dots, n-1), \varepsilon, \dots, \varepsilon] \quad (5)$$

утворюють незвідну систему твірних у  $T_{m,n}$ .

Очевидно, що для довільного числа  $i \in \mathbf{Z}$  маємо

$$u_2^i = [(1, 2, \dots, m)^i; (1, 2)^i, \dots, (1, 2)^i],$$

а тому, оскільки  $m$  непарне,

$$u_2^m = [\varepsilon; (1, 2), \dots, (1, 2)]$$

і

$$u_2^{m+1} = [(1, 2, \dots, m); \varepsilon, \dots, \varepsilon] = a.$$

Для кожного  $s \in \mathbf{Z}$  дістаємо

$$v_2^{2s} = [\varepsilon; (1, 2, \dots, n)^s, (1, 2, \dots, n)^s, (1, 2, \dots, n-1)^{2s}, \varepsilon, \dots, \varepsilon]$$

і

$$v_2^{2s+1} = [(1, 2); (1, 2, \dots, n)^{s+1}, (1, 2, \dots, n)^s, (1, 2, \dots, n-1)^{2s+1}, \varepsilon, \dots, \varepsilon].$$

Звідси отримуємо, що

$$v_2^{2n} = [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1, 2, \dots, n-1)^2, \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

$$v_2^{2n+1} = [(1, 2); (1, 2, \dots, n), \varepsilon, (1, 2, \dots, n-1)^3, \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

Поклавши  $k = \frac{n}{2} - 2$ , одержимо

$$(v_2^{2n})^k \cdot v_2^{2n+1} = [(1, 2); (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon].$$

Позначимо  $f = (v_2^{2n})^{\frac{n}{2}-2} \cdot v_2^{2n+1}$ , тоді

$$f^2 = [\varepsilon; (1, 2, \dots, n), (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon].$$

Покладемо далі

$$g = \prod_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} a^{2i} \cdot f^2 \cdot a^{-2i}$$

$$= [\varepsilon; (1, 2, \dots, n), \dots, (1, 2, \dots, n), \varepsilon].$$

Враховуючи, що

$$g \cdot u_2^m = [\varepsilon; \pi, \dots, \pi, (1, 2)],$$

де  $\pi = (1, 2, \dots, n) \cdot (1, 2) = (1)(2, 3, \dots, n)$  — цикл довжини  $n - 1$ , отримуємо

$$(g \cdot u_2^m)^{n-1} = [\varepsilon; \varepsilon, \dots, \varepsilon, (1, 2)].$$

Звідси маємо

$$a \cdot (g \cdot u_2^m)^{n-1} \cdot a^{-1} = [\varepsilon; (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon] = c.$$

Оскільки

$$c \cdot f = [(1, 2); \sigma, \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

де  $\sigma = (1, 2) \cdot (1, 2, \dots, n) = (2)(1, 3, \dots, n)$  — звідки  
цикл довжини  $n - 1$ , то

$$r = (c \cdot f)^2 = [\varepsilon; \sigma, \sigma, \varepsilon, \dots, \varepsilon].$$

Враховуючи, що  $(1, 2) \cdot \sigma = (1, 2, \dots, n)$  і

$$c \cdot r = [\varepsilon; (1, 2, \dots, n), \sigma, \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

матимемо

$$(c \cdot r)^n = [\varepsilon; \varepsilon, \sigma, \varepsilon, \dots, \varepsilon].$$

Позначивши останній вираз через  $t$ , отримуємо

$$(c \cdot r) \cdot t^{n-2} = [\varepsilon; (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon] = d.$$

Звідси випливає, що

$$d^{n-1} \cdot f = [(1, 2); \varepsilon, \dots, \varepsilon] = b.$$

Таким чином, для непарного  $m$  і парного  $n$  справджуються рівності

$$\begin{aligned} a &= u_2^{m+1}; \\ c &= a \cdot (g \cdot u_2^m)^{n-1} \cdot a^{-1}; \\ d &= c \cdot r \cdot t^{n-2}; \\ b &= d^{n-1} \cdot f, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $g, r, t, f$  визначено вище, тобто  $u_2, v_2$  є незвідною системою твірних  $T_{m,n}$ .

**Випадок 3.** Нехай  $m$  — парне,  $n$  — непарне натуральні числа. Доведемо, що елементи

$$u_3 = [(1, 2, \dots, m); \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

$$v_3 = [(1, 2); \varepsilon, \varepsilon, (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon, (1, 2, \dots, n)] \quad (7)$$

утворюють незвідну систему твірних групи  $T_{m,n}$ . Оскільки  $u_3 = a$ , то досить пересвідчитись, що  $b, c, d$  виражаються через  $u_3, v_3$ .

Для довільного цілого числа  $i$  маємо

$$v_3^i = [(1, 2)^i; \varepsilon, \varepsilon, (1, 2)^i, \varepsilon, \dots, \varepsilon, (1, 2, \dots, n)^i],$$

тобто

$$v_3^n = [(1, 2); \varepsilon, \varepsilon, (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon]$$

та

$$v_3^{n+1} = [\varepsilon; \varepsilon, \dots, \varepsilon, (1, 2, \dots, n)],$$

звідки

$$a \cdot v_3^{n+1} \cdot a^{-1} = [\varepsilon; (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon] = d.$$

Нехай далі

$$p = a^2 \cdot d \cdot a^{-2} = [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1, 2, \dots, n), \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

тоді

$$v_3^n \cdot p^2 = [(1, 2); \varepsilon, \varepsilon, \gamma, \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

де

$$\begin{aligned} \gamma &= (1, 2) \cdot (1, 2, \dots, n)^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 4 & 3 & 5 & 6 & \dots & n & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— цикл довжини  $n$ . Отже,

$$(v_3^n \cdot p^2)^n = [(1, 2); \varepsilon, \dots, \varepsilon] = b.$$

Оскільки

$$b \cdot v_3^n = [\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

то

$$a^{m-2} \cdot (b \cdot v_3^n) \cdot a^{-(m-2)} = [\varepsilon; (1, 2), \varepsilon, \dots, \varepsilon] = c.$$

Таким чином, для парного  $m$  і непарного  $n$  маємо

$$\begin{aligned} d &= a \cdot v_3^{n+1} \cdot a^{-1}; \quad b = (v_3^n \cdot p^2)^n; \\ c &= a^{m-2} \cdot (b \cdot v_3^n) \cdot a^{-(m-2)}, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $p$  визначено вище. Отже,  $u_3, v_3$  утворюють незвідну систему твірних групи  $T_{m,n}$ .

**Випадок 4.** Нехай  $m, n$  — парні натуральні числа. Покажемо, що таблиці

$$u_4 = [(1, 2, \dots, m); (1, 2, \dots, n-1), \varepsilon, \dots, \varepsilon],$$

$$v_4 = [(1, 2, \dots, m-1); \varepsilon, \dots, \varepsilon, (1, 2, \dots, n)] \quad (9)$$

утворюють незвідну систему твірних групи  $T_{m,n}$  у цьому випадку. Для цього досить довести, що таблиці  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$  виражаються через  $u_4$  і  $v_4$ .

Для довільних цілих чисел  $i \leq m$  та  $j$  справджуються рівності

$$u_4^i = [(1, 2, \dots, m)^i;$$

$$\underbrace{(1, 2, \dots, n-1), \dots, (1, 2, \dots, n-1)}_i, \varepsilon, \dots, \varepsilon]$$



Символом  $l_{\Lambda_i}(q)$  позначимо довжину найкоротшого розкладу таблиці  $q \in T_{m,n}$  в системі твірних  $\Lambda_i$  та покладемо

$$L_{\Lambda_i}(m, n) = \max_{q \in T_{m,n}} l_{\Lambda_i}(q), \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (14)$$

Нехай  $\Lambda$  — одна з систем  $\Lambda_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) залежно від парності чисел  $m$  і  $n$ . Тоді правильним є наступне твердження.

**Теорема 2.** Для довільних натуральних чисел  $m, n \geq 3$

$$L_{\Lambda}(m, n) \leq 62m^6n^9. \quad (15)$$

**Доведення.** Кожна з підстановок  $\pi$  і  $\sigma_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) виражаються через твірні елементи груп  $S_m$  та  $S_n$  відповідно. Тому таблиці  $q_j$  ( $1 \leq j \leq m+1$ ) будуть розкладатися на добуток твірних групи  $T_{m,n}$ . Нас цікавить довжина мінімального розкладу таблиці  $q \in T_{m,n}$  на добуток елементів однієї з систем  $\Lambda_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ). Розглянемо наступні випадки.

**Випадок 1.** Нехай  $m, n$  — непарні натуральні числа. За теоремою 1, елементи бази (1) групи  $T_{m,n}$  виражаються через систему твірних  $\Lambda_1 = \{u_1, v_1\}$  за формулами (4). Використовуючи цей факт, обчислимо довжини розкладів таблиць  $q_j$  ( $1 \leq j \leq m+1$ ) у базі  $\Lambda_1$ .

Таблиця  $q_{m+1}$  розкладається на добуток елементів  $a$  і  $b$ , а таблиці  $q_1, q_2, \dots, q_m$  — на добуток  $c$  і  $d$ , які, у свою чергу, виражаються через  $u_1, v_1$ . Тому, обчислюючи довжини розкладів кожної з таблиць  $a, b, c, d$  на добуток  $u_1, v_1$ , отримуємо

$$l_{\Lambda_1}(a) = m+1; \quad l_{\Lambda_1}(b) \leq 3m^3n;$$

$$l_{\Lambda_1}(c) \leq 2m^3n; \quad l_{\Lambda_1}(d) \leq 5m^2n^2. \quad (16)$$

Відомо, що довільна транспозиція  $(i, j)$  симетричної групи  $S_k$  зображується у вигляді добутку

$$(i, j) = \beta_1^{-i+1} \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_1^{-1})^{j-i} \cdot \beta_1^{j-1}, \quad (j > i) \quad (17)$$

де  $\alpha_1 = (1, 2)$ ,  $\beta_1 = (1, 2, \dots, k)$  — твірні симетричної групи  $S_k$ .

З урахуванням (16) і (17) можна показати, що

$$l_{\Lambda_1}(q_{m+1}) \leq 5m^6n, \quad l_{\Lambda_1}(q_1) \leq 12m^3n^5,$$

$$l_{\Lambda_1}(q_{i+1}) \leq 2(m-i)(m+1) + 12m^3n^5,$$

$$1 \leq i \leq m-1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} L_{\Lambda_1}(m, n) &= \\ &= \max_{q \in T_{m,n}} \sum_{i=1}^{m+1} l_{\Lambda_1}(q_i) \leq 37m^6n^5. \end{aligned} \quad (18)$$

**Випадок 2.** Нехай  $m$  — непарне,  $n$  — парне натуральні числа. Згідно з теоремою 1, в групі  $T_{m,n}$  існує двоелементна база  $\Lambda_2 = \{u_2, v_2\}$ . Враховуючи формули (6), (12), (17) та міркування, наведені в попередньому випадку, отримуємо

$$l_{\Lambda_2}(a) = m, \quad l_{\Lambda_2}(b) \leq 29m^3n^7,$$

$$l_{\Lambda_2}(c) \leq 4m^3n^3, \quad l_{\Lambda_2}(d) \leq 28m^3n^6,$$

$$l_{\Lambda_2}(q_{m+1}) \leq 31m^6n^7, \quad l_{\Lambda_2}(q_1) \leq 30m^3n^9,$$

$$l_{\Lambda_2}(q_{i+1}) \leq 2m(m-i) + 30m^3n^9,$$

$$1 \leq i \leq m-1.$$

Тому

$$L_{\Lambda_2}(m, n) \leq 62m^6n^9. \quad (19)$$

**Випадок 3.** У випадку парного  $m$  та непарного  $n$  аналогічно одержимо

$$l_{\Lambda_3}(a) = 1, \quad l_{\Lambda_3}(b) \leq 7n^2,$$

$$l_{\Lambda_3}(c) \leq 10mn^2, \quad l_{\Lambda_3}(d) = n+3,$$

$$l_{\Lambda_3}(q_{m+1}) \leq 12m^4n^2, \quad l_{\Lambda_3}(q_1) \leq 14mn^5,$$

$$l_{\Lambda_3}(q_{i+1}) \leq 2(m-i) + 14mn^5,$$

$$1 \leq i \leq m-1.$$

Звідси випливає, що

$$L_{\Lambda_3}(m, n) \leq 27m^4n^5. \quad (20)$$

**Випадок 4.** Аналогічно для парних  $m$  і  $n$  маємо

$$l_{\Lambda_4}(\tilde{a}) \leq 3m^2n^3, \quad l_{\Lambda_4}(\tilde{b}) \leq m^2n^2,$$

$$l_{\Lambda_4}(\tilde{c}) \leq 7m^2n^3, \quad l_{\Lambda_4}(\tilde{d}) \leq 3m^3n^3,$$

$$l_{\Lambda_4}(q_{m+1}) \leq \frac{11}{2}m^5n^3, \quad l_{\Lambda_4}(q_1) \leq \frac{41}{2}m^3n^6,$$

$$l_{\Lambda_4}(q_{i+1}) \leq 6m^2n^3(m-i) + \frac{41}{2}m^3n^6,$$

$$1 \leq i \leq m-1.$$

Звідси дістаємо

$$L_{\Lambda_4}(m, n) \leq 27m^5n^6. \quad (21)$$

Оскільки ліва частина кожної з нерівностей (18)–(21) не перевищує  $62m^6n^9$ , то справджується нерівність (15).

Теорему 2 доведено.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kerber A. Enumeration under finite group action: symmetry classes of mappings in "Combinatoire enumerative" // Lect. Notes in Math.— 1986.— **1224**.— P.160–176.
2. Kerber A. Representation of permutation groups. Vol 1.— Berlin: Springer, 1971.— 160 p.
3. Kerber A. Representation of permutation groups. Vol 2.— Berlin: Springer, 1974.— 156 p.
4. Ball R.W. Maximal subgroups of symmetric groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1966.— **121**.— P.393–407.
5. Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J. The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. of Algebra.— 1987.— **111**, N2.— P.365–383.
6. Калужнин Л.А., Суцанский В.И., Устименко В.А. Применение ЭВМ в теории групп подстановок и ее приложениях // Кибернетика.— 1982.— N6.— С.83–94.
7. Калужнин Л.А., Суцанский В.И., Устименко В.А. Операция экспоненцирования в теории групп подстановок и ее приложениях // Материалы VII Всесоюзной конф. по теории групп.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С.44–57.
8. Устименко В.А. Экспоненцирование симметрических групп — максимальная группа подстановок // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: Сб. науч. тр.— Ярославль, 1983.— С.19–33.
9. Сікора В.С. Двоелементні бази гіпероктаедральних груп // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук.— 1999.— Вип.1.— С.87–93.
10. Сікора В.С. Розклади елементів мономіальних груп над скінченними полями за мінімальними базами // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук.— 1999.— Вип.3.— С.71–79.
11. Isaacs I.M., Thilo Zieschang. Generating symmetric groups // Math. Notes.— 1995.— **10**.— P.734–738.