УДК 517.956

©2011 р. В.А. Літовченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ОДНЕ ТВЕРДЖЕННЯ ПРО ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ГЛАДКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПЕРІОДИЧНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ПДС З ОПУКЛИМИ СИМВОЛАМИ

Сформульовано необхідні й достатні умови існування в просторі 2π–періодичних розподілів граничних значень при $t \to +0$ розв'язків параболічних псевдодиференціальних систем з опуклими символами псевдодиференціювання, залежними лише від часового параметра.

In the space of 2π–periodic distributions formulated the necessary and sufficient conditions for the existence of boundary values $t \to +0$ of solutions of parabolic PDS with convex symbols that are dependent on the time parameters.

Вступ. Теорія просторів формальних тригонометричних рядів [1] у поєднанні з класичною теорією параболічних систем [2–4] дає достатньо ефективний інструментарій дослідження задачі Коші для параболічних систем як диференціальних рівнянь із частинними похідними, так і псевдодиференціальних рівнянь у просторах періодичних функцій.

Такий підхід дозволив у [5] описати максимальну множину $\mathcal{M}$ узагальнених початкових даних, з якими задача Коші для періодичних параболічних псевдодиференціальних систем (ПДС) із широкого класу $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}$ (який містить $\overrightarrow{2b}$–параболічні системи із залежними лише від часу коефіцієнтами) є коректно розв'язною. Ця множина $\mathcal{M}$ є досить багатою на елементи і містить у собі різні простори основних та узагальнених періодичних функцій. У зв'язку з цим виникає природна задача про знаходження умов на поведінку розв'язку системи при досить малих значеннях t, які гарантують існування у цього розв'язку граничних значень при $t \to +0$ у тому чи іншому просторі, що міститься в $\mathcal{M}$.

Тут, розвиваючи реалізовану в [6, 7] ідею, сформульовано та доведено ознаку існування граничних значень розв'язків зазначених ПДС у просторі 2π–періодичних розподілів.

1. Попередні відомості. Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1; \ldots ; m\}$, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел; $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідів простір, $x = (x_1, \ldots , x_n)$, $y = (y_1, \ldots , y_n)$ – його елементи (вектори), $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ – скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = (x, x)$, $C^{\infty}_{2\pi}(L)$ – простір усіх нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, визначених на L, а $\omega_j(\cdot)$ – зростаючі, неперервні функції на $[0; +\infty)$, причому $\omega_j(0) = 0$ і $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega_j(t) = +\infty$, $j \in \mathbb{N}_n$. Покладемо

$$\Omega_j(t) = \int_0^t \omega_j(\xi)d\xi, \quad t \geq 0,\ j \in \mathbb{N}_n;$$

функція $\Omega_j(\cdot)$ має такі властивості (*див., наприклад,* [5]):
1) вона диференційовна, зростаюча на $[0; +\infty)$;
2) $\Omega_j(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \Omega_j(t) = +\infty$;
3) $\Omega_j(\cdot)$ – опукла (донизу) функція.
Довизначимо $\Omega_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_n$, на $(-\infty, 0)$ парним способом і покладемо

$$\overrightarrow{\Omega}(x) := \{\Omega_1(x_1); \ldots ; \Omega_n(x_n)\}, \ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Подібним способом за аналогічними до $\omega_j(\cdot)$ функціями $\mu_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_n$, визначимо вектор-функцію

$$\overrightarrow{M}(x):=\{M_1(x_1); \ldots ; M_n(x_n)\}, \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

і розглянемо $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ – сукупність усіх функцій

φ з $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, які допускають аналітичне продовження на весь $\mathbb{C}^n$, для яких

$$|\varphi(x+iy)| \le c\mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{M}(\delta y))}, \quad (x+iy)\in\mathbb{C}^n, \quad (1)$$

де c, δ – додатні сталі, залежні лише від φ а $(1, \overrightarrow{M}(\delta y)) := \sum_{j=1}^{n} M_j(\delta y_j)$.

Множина функцій $\varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, для яких нерівність (1) виконується при $\delta = b > 0$, утворює банахів простір $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ відносно норми

$$\|\varphi\|_b = \sup_{x\in[0;2\pi],\, y\in\mathbb{R}^n} \left\{ |\varphi(x+iy)|\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(by))} \right\},$$

$$\varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$$

(тут $[0;2\pi] = [0;2\pi]^n \subset \mathbb{R}^n$). При цьому всі вкладення $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b_1} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b_2}$, $b_1 < b_2$, є компактними і $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} = \bigcup_{b>0} \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ [5].

Простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ зі слабкою збіжністю позначається символом $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$; при цьому $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}} = \lim\limits_{b\to\infty} \mathrm{pr}\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M},b}$, де $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M},b}$ – простір, топологічно спряжений з $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M},b}$.

Далі, нехай Φ', $(C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n))'$ і $L_2([0;2\pi])$ – простори відповідно формальних тригонометричних рядів, 2π–періодичних розподілів, а також вимірних за Лебегом 2π–періодичних й інтегровним з квадратом в $\mathbb{R}^n$ функцій [6].

Для зазначених просторів виконуються такі неперервні й щільні вкладення [5, 6]:

$$\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} \subset \mathbb{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset L_2([0;2\pi]) \subset$$
$$\subset (\mathbb{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n))' \subset \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}} \subset \Phi'.$$

Елементи простору $(\mathbb{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n))'$ можна охарактеризувати через їх коефіцієнти Фур'є c_k так [1]:

$$(\mathbf{A}) \qquad \{f \in (\mathbb{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n))'\} \Leftrightarrow \{\exists c > 0\, \exists r\in\mathbb{N}$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}^n:\ |c_k(f)| \le c\|k\|^r\}.$$

Позначимо через $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}([0;T])$, $0 < T < +\infty$, клас, означений в [5], тобто сукупність усіх функцій $a : [0;T]\times\mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ таких, що:

1) $\sup_{t\in[0;T]} |a(t,k)| \le c_0 L(k)$, $c_0 > 0$, $(\forall k\in\mathbb{Z}^n)$, де $L(\cdot)$ така додатна функція, що

$$\exists c_1 > 0\ \forall \delta \in (0;1):$$

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \{L(k)\mathrm{e}^{-\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}\} \le c_1\delta^{-1};$$

2) $\exists c_2 \ge 0\ \forall t\in[0;T]\ \forall\varepsilon\in(0;1)\ \exists\nu(\varepsilon) > 0$, $\nu(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, $\forall k\in\mathbb{Z}^n$:

$$|a(t+\varepsilon,k) - a(t,k)| \le \nu(\varepsilon)(L(k)+c_2).$$

Для $a(\cdot,\cdot)$ з $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}([0;T])$ покладемо

$$f_a(\cdot) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \overline{a(t,k)}\mathrm{e}^{i(k,\cdot)}, \quad t\in[0;T],$$

і в просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ з вектор–функцією $\overrightarrow{M}$, двоїстою за Юнгом з $\overrightarrow{\Omega}$, означимо псевдодиференціальний оператор A_a так:

$$A_a\varphi = f_a * \varphi \quad (\forall\varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}})$$

(тут символом $*$ позначено операцію згортки). Про основні властивості та приклади оператора A_a, а також про його продовження на ширші класи функцій див. у [5].

Через $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} = (A_{a_{ij}})^m_{i,j=1}$, $m\in\mathbb{N}$, позначимо матричний псевдодиференціальний оператор у векторному просторі $\mathbf{G}_{\overrightarrow{M}}$ з параметром $t\in[0;T]$, побудований за матрицею-символом $\mathcal{A}_t(\cdot) = (a_{ij}(t,\cdot))^m_{i,j=1}$ кожен елемент якої належить до класу $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}([0;T])$, тобто оператор, дія якого на елементах φ з $\mathbf{G}_{\overrightarrow{M}}$ при кожному фіксованому $t\in[0;T]$ задається наступним способом:

$$(\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}\varphi)(t,\cdot) =$$
$$= \mathrm{col}\left(\sum_{j=1}^{m}(A_{a_{1j}}\varphi_j)(t,\cdot);\ldots;\sum_{j=1}^{m}(A_{a_{mj}}\varphi_j)(t,\cdot)\right),$$

де φ_j – координати вектора φ.

З таким оператором $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}$ розглянемо систему

$$\partial_t u(t,x) = (\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t})(t,x),$$
$$(t,x)\in\Pi_T := (0;T]\times\mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

в якій $u = \mathrm{col}(u_1,\ldots;u_m)$, припустивши виконання для цієї системи такої умови:

$$\exists\delta^{\pm} > 0\ \exists c^{\pm}\ge 0\ \forall t\in[0;T]\ \forall k\in\mathbb{Z}^n\ \forall j\in\mathbb{N}_m:$$

$$-c^- - \delta^-(1,\overrightarrow{\Omega}(k)) \le$$
$$\le \mathrm{Re}\lambda_j(t,k) \le -\delta^+(1,\overrightarrow{\Omega}(k)) + c^+$$

(тут λ_j – власні числа матриці $\mathcal{A}_t$ – символу оператора $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}$).

Якщо для системи (2) задати початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in \mathbf{G}'_{\overrightarrow{M}}, \tag{3}$$

і під розв'язком задачі Коші (2), (3) розуміти вектор-функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$, яка при кожному фіксованому t з $(0;T]$ належить до області визначення матричного оператора $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}$, є сильно диференційовною за t на $(0;T]$ у просторі $\mathbf{G}_{\overrightarrow{M}}$, задовольняє систему (2) у звичайному розумінні, а початкову умову (3) – у сенсі слабкої збіжності в $\mathbf{G}'_{\overrightarrow{M}}$, то правильне таке твердження [5]: *простір $\mathbf{G}'_{\overrightarrow{M}}$ є максимальним класом початкових даних, з якими задача Коші (2), (3) коректно розв'язна; її розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому $t \in (0;T]$ є елементом $\mathbf{G}_{\overrightarrow{M}}$, зображується формулою*

$$u(t,x) = G(t,x) * f, \ \ (t,x) \in \Pi_T,$$

в якій $G(t,\cdot)$ – фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші, причому для того, щоб граничне значення f розв'язку $u(t,\cdot)$ (при $t \to +0$) належало до $\mathbf{L}_2([0;2\pi])$, необхідно й достатньо, щоб

$$\exists c > 0 \ \ \forall 0 < t \ll 1 : \ \ \|u_j(t,\cdot)\|_{\mathbf{L}_2([0;2\pi])} \le c,$$

при цьому завжди $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\mathbf{L}_2([0;2\pi])} f$.

2. Основний результат. Правильне таке твердження.

Теорема. *Нехай $f \in \mathbf{G}'_{\overrightarrow{M}}$, u – відповідний розв'язок задачі Коші (2), (3), а компоненти $\Omega_\nu(\cdot)$, $\nu \in \mathbb{N}_n$, двоїстої за Юнгом з $\overrightarrow{M}$ вектор-функції $\overrightarrow{\Omega}$ такі, що:*

1) відповідні функції $\omega_\nu(\cdot)$ – диференційовні на $[0;+\infty)$;

2) розв'язок рівняння

$$\Omega_\nu(\rho) = \delta\Omega_\nu(k)$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$ і $\delta > 0$ виражається степенево через k. Тоді для того, щоб $f \in (\mathbf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n))'$, необхідно й достатньо, щоб

$$\exists c > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \exists r \in \mathbb{N} \ \ \forall t \in (0;T] \ \ \forall j \in \mathbb{N}_m :$$

$$\|u_j(t,x)\|_{L_2([0;2\pi])} \le$$

$$\le c \prod_{\nu=1}^{n} \rho_\nu^{2(r+1)} exp\{-2\delta t \Omega_\nu(\rho_\nu)\}, \tag{4}$$

де ρ_ν – розв'язок рівняння

$$t\rho\omega_\nu(\rho) = (r+1)/\delta. \tag{5}$$

Доведення. Наведемо схему доведення у випадку $n = 1$ (решта значень $n \in \mathbb{N}$ реалізуються аналогічно).

Нехай $f \in (\mathbf{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n))'$, тоді згідно з критерієм (A) (див. попередній пункт)

$$\exists c_0 > 0 \, \exists r \in \mathbb{N} : \ |c_k(f_j)| \le c_0|k|^r, \ k \in \mathbb{Z}, \, j \in \mathbb{N}_m.$$

Звідси, враховуючи структуру розв'язку задачі Коші (2), (3)

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u) e^{ikx}, \quad (t,x) \in \Pi_T,$$

де

$$c_k(u) = \theta_t(k) c_k(f), \quad t \in (0;T], \, k \in \mathbb{Z},$$

а $\theta_t(\cdot) = (\theta_t^{ij}(\cdot))_{i,j=1}^m$ – матрицант відповідної двоїстої за Фур'є системи до (2), та оцінку [5]

$$|\theta_t(k)| \le c \exp\{-t\delta\Omega_1(k)\}, \quad t \in (0;T], \, k \in \mathbb{Z}$$

(тут $|(a_{ij})_{i,j=1}^m| := \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$), одержимо

$$\|u_j(t,x)\|_{L_2([0;2\pi])} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{q=1}^{m} \theta_t^{jq}(k) \overline{c_k(f_q)} \right|^2 \le$$

$$\le (cc_0)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{q=1}^{m} \exp\{-\delta t \Omega_1(k)\} |k|^r \right)^2 \le$$

$$\le (mcc_0)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2r} \exp\{-2\delta t \Omega_1(k)\} \le$$

$$\le (mcc_0)^2 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |k|^{-2} \right) \exp\{-2\delta t \Omega_1(k)\} \times$$

$$\times \sup_{\rho>0} \left\{ \rho^{2(r+1)} e^{-2\delta t \Omega_1(\rho)} \right\}.$$

Безпосередньо переконуємося, що $\sup\limits_{\rho>0}\left\{\rho^{2(r+1)}e^{-2\delta t\Omega_1(\rho)}\right\}$ досягається в точці $\rho=\rho_1(t)$, де $\rho_1(t)$ – розв'язок рівняння (5) при $\nu=1$, тобто

$$\sup_{\rho>0}\left\{\rho^{2(r+1)}e^{-2\delta t\Omega_1(\rho)}\right\}=\rho_1^{2(r+1)}e^{-2\delta t\Omega_1(\rho_1)}.$$

Навпаки, нехай виконується умова (4). Тоді компоненти коефіцієнтів Фурє $c_k(u)$ розв'язку u задовольняють нерівність

$$\Big|\sum_{q=1}^{m}\theta_t^{jq}(k)\overline{c_k(f_q)}\Big|\leq c\rho_1^{2(r+1)}e^{-2\delta t\Omega_1(\rho_1)},$$

$$k\in\mathbb{Z},t\in(0;T],j\in\mathbb{N}_m,$$

або ж

$$\Big|\theta_t(k)\overline{c_k(f)}\Big|\leq c\rho_1^{2(r+1)}e^{-2\delta t\Omega_1(\rho_1)},$$

$$k\in\mathbb{Z},t\in(0;T].$$

Перемноживши тепер почленно останню нерівність на $m|\theta_t^{-1}(k)|$ і взявши до уваги очевидну нерівність

$$|(b_{ij})_{i,j=1}^m(d_i)_{i=1}^m|\leq m|(b_{ij})_{i,j=1}^m||(d_i)_{i=1}^m|,$$

маємо

$$|c_k(f)|\leq mc\rho_1^{2(r+1)}e^{-2\delta t\Omega_1(\rho_1)}|\theta_t^{-1}(k)|,$$

$$k\in\mathbb{Z},t\in(0;T].$$

Звідси, скориставшись оцінкою [5]

$$|\theta_t^{-1}(k)|\leq c\exp\{t\delta_0\Omega_1(k)\},\quad t\in(0;T],\,k\in\mathbb{Z},$$

одержимо

$$|c_k(f)|\leq c_1\inf_{t\in(0;T]}\left\{\rho_1^{2(r+1)}e^{-t(2\delta\Omega_1(\rho_1)-\delta_1\Omega_1(k))}\right\}$$

для всіх $k\in\mathbb{Z}$ і $\delta_1\geq\delta_0$.

Знайдемо

$$\inf_{t\in(0;T]}\left\{\rho_1^{2(r+1)}e^{-t(2\delta\Omega_1(\rho_1)-\delta_1\Omega_1(k))}\right\}$$

скориставшись відповідними засобами диференціального числення. Для знаходження стаціонарних точок розв'яжемо рівняння

$$\left(\rho_1^{2(r+1)}(t)e^{-t(2\delta\Omega_1(\rho_1(t))-\delta_1\Omega_1(k))}\right)'_t=0,$$

або, що те ж саме,

$$2(r+1)\rho_1'-2\rho_1\delta\Omega_1(\rho_1)+\rho_1\delta_1\Omega_1(k)-$$

$$-2t\delta\rho_1\omega_1(\rho_1)\rho_1'=0.$$

З огляду на те, що $\rho_1(t)$ – розв'язок рівняння (5), остання рівність набуде вигляду

$$2\delta\Omega_1(\rho_1(t))=\delta_1\Omega_1(k),\ k\in\mathbb{Z},\,t>0,\,\delta_1\geq\delta_0. \tag{6}$$

Оскільки $\rho_1(t)$ зростає при наближенні t до нуля (див. рівняння (5)), а функція $\Omega_1(\cdot)$ є монотонно зростаючою на $[0;+\infty)$, то належність стаціонарної точки $t=t_0$ (тобто розв'язку рівняння (6)) до проміжку $(0;T]$ досягається шляхом вибору досить великого δ_1. Зважаючи при цьому на умову 2) вихідної теореми, з рівності (6) приходимо до існування сталих $c_0>0$ і $q\in\mathbb{N}$ таких, що

$$\inf_{t\in(0;T]}\left\{\rho_1^{2(r+1)}e^{-t(2\delta\Omega_1(\rho_1)-\delta_1\Omega_1(k))}\right\}\leq c_0|k|^q,k\in\mathbb{Z},$$

а відтак, і до належності f до $(\mathbf{C}_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R}^n))'$ (див. критерій (A)).

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 257, № 4. – С. 799 – 804.

2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

3. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. — 274 с.

4. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.

5. Літовченко В.А. Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем у просторах періодичних функцій // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, № 3. – С. 394 – 420.

6. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.

7. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.